Análise Matemática I B, C, D e E - 1° Semestre 2014/15
Resolução Teste 1 - 01/11/2014

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \frac{3x - x^2}{\log^2(|x-1|)} \geq 0 \right\} \qquad \text{e}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{(-1)^n}{n+3}, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Explicite o conjunto A sob a forma de um intervalo ou de uma união de intervalos.

Resolução

Comecemos por determinar o domínio da inequação:

$\log^2(|x-1|) \neq 0 \ \wedge \ |x-1| > 0 \Leftrightarrow \log^2(|x-1|) \neq 0 \ \wedge \ |x-1| \neq 0 \Leftrightarrow |x-1| \neq 1 \ \wedge \ |x-1| \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 1 \wedge x-1 \neq -1 \wedge x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1.$

Logo o domínio da inequação será $\mathbb{R} \backslash \{0, 1, 2\}$.

Como $\log^2(|x-1|) \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{3x - x^2}{\log^2(|x-1|)} \geq 0 &\Leftrightarrow 3x - x^2 \geq 0 \ \wedge \ x \in D \\ &\Leftrightarrow x(3-x) \geq 0 \ \wedge \ x \in D \\ &\Leftrightarrow x \in [0,3] \ \wedge \ x \in D \end{aligned}$$

Assim,

$$A =]0,1[\cup]1,2[\cup]2,3].$$

(b) Determine o interior e a fronteira do conjunto $A \cup B$. Indique, justificando, se $A \cup B$ é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

Resolução

Note que $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+3} = 0$, que $\left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{(-1)^n}{n+3}, \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \text{ ímpar} \right\} \subset [-\frac{1}{4}, 0[$ e que $\left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{(-1)^n}{n+3}, \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \text{ par} \right\} \subset]0, \frac{1}{5}] \subset A$.

Então,
$int(A \cup B) =]0,1[\cup]1,2[\cup]2,3[$
$fr(A \cup B) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \dfrac{(-1)^n}{n+3}, \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \text{ ímpar} \right\} \cup \{0,1,2,3\}$
$\overline{A \cup B} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{(-1)^n}{n+3}, \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \text{ ímpar} \right\} \cup [0,3]$
$A \cup B$ não é aberto pois, por exemplo, $3 \in A \cup B$ mas $3 \notin int(A \cup B)$.
$A \cup B$ não é fechado pois, por exemplo, $0 \in \overline{A \cup B}$ mas $0 \notin A \cup B$.

(c) Determine o derivado do conjunto $A \cup B$.
Resolução

$(A \cup B)' = [0,3]$.

(d) O conjunto $A \cup B$ admite máximo? Justifique.
Resolução

$\{x : x \text{ é majorante de } A \cup B\} = [3, +\infty[$. Como 3 é majorante de $A \cup B$ e $3 \in A \cup B$ então 3 é o máximo de $A \cup B$.

2. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sucessão definida por recorrência por:

$$u_n = \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} = u_n \left(u_n + \dfrac{1}{4} \right), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Note que $u_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Prove, usando o Princípio de Indução Matemática, que $u_n \leq \dfrac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Resolução

Comecemos por mostrar que a afirmação é válida para o primeiro dos números naturais para o qual se pretende demonstrar a proposição, ou seja para $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ o que é uma proposição verdadeira.

Suponhamos agora que a afirmação é válida para um certo natural $n \in \mathbb{N}$.
Hipótese de indução: $u_n \leq \dfrac{1}{2}$.
Mostremos que tal implica que também seja válida para o natural seguinte $n+1$.
Tese de indução: $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$.
Prova da tese: Pela hipótese de indução temos que $u_n \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow u_n + \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Assim,

$$u_{n+1} = u_n \left(u_n + \frac{1}{4} \right) \leq \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{3}{8} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Recorrendo ao Princípio de Indução Matemática, podemos concluir que

$$u_n \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Mostre que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente.
<u>**Resolução**</u>

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n =& u_n\left(u_n + \frac{1}{4}\right) - u_n = \\ =& u_n\left(u_n + \frac{1}{4} - 1\right) = \\ =& u_n\left(u_n - \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Pela alínea (a), $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1}{2}$ logo $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$. Assim, atendendo ainda a que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(u_n - \frac{3}{4}\right) < 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, a sucessão é monótona decrescente.

(c) Justifique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente e determine o seu limite.
<u>**Resolução**</u>

Mostrámos nas alíneas anteriores que a sucessão é monótona (decrescente) e limitada, logo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente. Seja l o limite da sucessão. A sucessão $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, logo também é convergente para o mesmo limite. Assim,

$$l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n\left(u_n + \frac{1}{4}\right) = l\left(l + \frac{1}{4}\right).$$

Daqui resulta:

$$l = l\left(l + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow l - l\left(l + \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow l\left(1 - l - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \vee l = \frac{3}{4}.$$

Como, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1}{2}$ temos que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \dfrac{1}{2}$ donde se conclui que o limite da sucessão é $l = 0$.

3. Determine o valor dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ (∞^0)

<u>**Resolução**</u>
Tem-se,

- $2^n + 3^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$

- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\frac{2}{3})^n 2+3}{(\frac{2}{3})^n+1} = 3$, pois $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, uma vez que $0 < \frac{2}{3} < 1$.

Assim, podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3.$$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3+n^2}{2n^2-5}\right)^n \cos(n^2+1)$

Resolução

Como, $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\frac{3}{n^2}+1}{2-\frac{5}{n^2}}\right)^n = 0$ e $\cos(n^2+1)$ é uma sucessão limitada entre -1 e 1, podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3+n^2}{2n^2-5}\right)^n \cos(n^2+1) = 0$$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+k}}$

Resolução

Note que as parcelas da soma $\sum_{k=0}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+k}}$ são da forma $\dfrac{1}{\sqrt{3n^2+k}}$ com k entre 0 e $2n$, donde a maior parcela será $\dfrac{1}{\sqrt{3n^2}}$ e a menor $\dfrac{1}{\sqrt{3n^2+2n}}$ i.e.

$$\frac{1}{\sqrt{3n^2+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n^2+2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n^2}}$$

para k de 0 a $2n$.

Somando em k, obtemos
$\sum_{k=0}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+2n}} \leq \sum_{k=0}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+k}} \leq \sum_{k=0}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{3n^2}} \Leftrightarrow \dfrac{2n+1}{\sqrt{3n^2+2n}} \leq \sum_{k=0}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{3n^2+k}} \leq \dfrac{2n+1}{\sqrt{3n^2}}$, pois os somatórios têm $2n+1$ parcelas.

Como
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{3n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{3}n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ e $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{3n^2+2n}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{3+\frac{2}{n}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,
pelo teorema das sucessões enquadradas concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{\sqrt{3n^2+k}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

4. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\arcsin(x^2-4)\frac{x^2+x-6}{x-2}.$$

   (a) Determine o conjunto D_f, correspondente ao domínio de f.
   Resolução

   $D_f=\{x\in\mathbb{R} : -1\leq x^2-4\leq 1 \wedge x-2\neq 0\}$

   $$1\leq x^2-4\leq 1\wedge x-2\neq 0 \Leftrightarrow -1\leq x^2-4\wedge x^2-4\leq 1\wedge x-2\neq 0\Leftrightarrow$$
   $$x^2-3\geq 0\wedge x^2-5\leq 0\wedge x\neq 2\Leftrightarrow x\in]-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty[\wedge x\in[-\sqrt{5},\sqrt{5}]\wedge x\neq 2$$

   Assim,
   $$D_f=[-\sqrt{5},-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},\sqrt{5}]\backslash\{2\}.$$

   (b) Analise f quanto à continuidade.
   Resolução

   Para qualquer ponto do seu domínio a função f é contínua pois é definida como o produto de duas funções contínuas:

   - a composta de duas funções contínuas (o arcosseno e um polinómio)
   - o quociente de duas funções contínuas (dois polinómios).

   (c) Defina g um prolongamento por continuidade de f a $\overline{D_f}$ (ou seja, à aderência de D_f).
   Resolução

   Sendo g um prolongamento por continuidade de f a $\overline{D_f}=[-\sqrt{5},-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},\sqrt{5}]$, bastará definir a imagem de g no ponto $x=2$ como o valor de $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} f(x)$, caso este limite exista.

   $$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} f(x)&=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}}\arcsin(x^2-4)\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}}\arcsin(x^2-4)\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}\\ &=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}}\arcsin(x^2-4)(x+3)=\arcsin(0)5=0\end{aligned}$$

   Assim,
   $$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{, se } x\in D_f\\ 0 & \text{, se } x=2\end{cases}$$

(d) Justifique que g é limitada em $\overline{D_f}$.

<u>**Resolução**</u>

Para $x \in [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}] \backslash \{2\}$, g é contínua pois provou-se na alínea (b) que f é contínua em D_f. Para $x = 2$, g é contínua pois trata-se de um prolongamento por continuidade de f a esse ponto. Logo, g é contínua em $\overline{D_f}$. Como $\overline{D_f}$ é um conjunto limitado e fechado, sendo g contínua em $\overline{D_f}$, o Teorema de Weierstrass garante a existência de um máximo e de um mínimo para g em $\overline{D_f}$. Logo g é limitada em $\overline{D_f}$.

5. Seja h uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que existem $a, b \in \mathbb{R}$ que satisfazem: $h(a) = b$ e $h(b) = -b^3$.

(a) Mostre que h tem pelo menos um zero.

<u>**Resolução**</u>

Podemos considerar $a \neq b$, caso contrário $h(a) = h(b) \Leftrightarrow b = -b^3 \Leftrightarrow b(1+b^2) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ e portanto $h(a) = h(b) = 0$ logo h tem pelo menos um zero.

Sem perca de generalidade, suponhamos $a < b$. A função h é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $[a, b]$ e $h(a)h(b) = b(-b^3) = -b^4 \leq 0$.

Se $h(a)h(b) = 0$ então pela lei do anulamento do produto h tem pelo menos um zero (no ponto $x = a$ ou no ponto $x = b$).

Se $h(a)h(b) < 0$, como h é contínua em $[a, b]$, o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]a, b[$.

(b) Utilize a alínea anterior para justificar que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que a função real de variável real definida por

$$m(x) = \begin{cases} h(x) & , \text{se } x \geq k \\ 0 & , \text{se } x < k \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

<u>**Resolução**</u>

Para $x > k$, m é contínua porque h é contínua em $\mathbb{R}$.

Para $x < k$, m é contínua porque é constante.

Para $x = k$, m será contínua se $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ x \geq k}} m(x) = \lim\limits_{\substack{x \to k \\ x < k}} m(x)$, ou seja

$$\lim_{\substack{x \to k \\ x \geq k}} m(x) = \underbrace{\lim_{\substack{x \to k \\ x \geq k}} h(x) = h(k)}_{h \text{ contínua em } \mathbb{R}} = 0 = \lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} 0 = \lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} m(x).$$

Tal significa que m será contínua se h admite pelo menos um zero, o que se verifica atendendo à alínea (a).