FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática I (B, C, D e E)

2º Teste — 13 de Dezembro de 2014
(Duração 1:30)

Justifique convenientemente todas as respostas.

1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2-6) & x \leq 0 \\ \text{sen}(x)\log(x+1) & 0 < x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^{\text{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} & x > 1 \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Sabendo que a função f é contínua em $x = 0$, estude a sua diferenciabilidade no mesmo ponto.

   (b) **[1.5 val.]** Calcule $\lim\limits_{x \to 1^+} x^{\text{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

   (c) **[1.0 val.]** Tendo em conta a alínea anterior e sabendo que $\text{sen}(1)\log(2) < f(1)$, justifique a existência, ou não, de um extremo relativo em $x = 1$.

2. **[2.0 val.]** Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 4bx^2 + ax + 6.$$

   Verifique se existem a e b de forma a que $(0, f(0))$ seja um ponto de inflexão e $f(1)$ seja um mínimo relativo. Note que deve justificar detalhadamente por que razão, para os valores de a e b encontrados, se trata efectivamente de um extremo relativo e de um ponto de inflexão.

3. **[2.0 val.]** Escreva a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange de ordem 2 para a função $f(x) = e^{\text{sen}(x)}$.

4. Calcule

   (a) **[2.0 val.]** $\displaystyle\int (x+1)\cos(-3x)\,dx$;

   (b) **[2.5 val.]** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt{x})}\,dx$.

v.s.f.f.
⟶

5. Considere a função $F(x) = \int_0^{4x} \sqrt{t}\, e^t \, dt$.

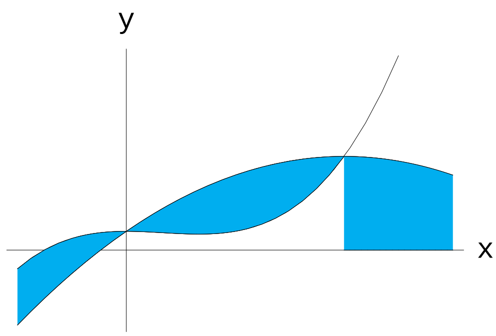
(a) **[1.5 val.]** Determine, justificando, o domínio de F e calcule a sua derivada.

(b) **[1.5 val.]** Prove que $F(1) \leq 8\, e^4$. (Sugestão: Aplique o T. Lagrange à função F no intervalo $[0,1]$)

6. **[2.0 val.]** Considere a figura abaixo, onde estão desenhados os gráficos das funções

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1 \text{ e } g(x) = x^3 - x^2 + 1, \text{ no intervalo } [-1,3].$$

Escreva sob a forma de integral, sem o calcular, a área da região a sombreado.



7. Considere a função $f(x) = \frac{4x-4}{x(x^2+2)}$.

(a) **[2.0 val.]** Determine uma primitiva de f.

(b) **[1.0 val.]** Calcule, por definição, o valor do integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c})$	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \sqrt{a}\,x + t$, se $a > 0$ $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,x + \sqrt{c}$, se $c > 0$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$ $R(-\text{sen}(x), -\cos(x)) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(x) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$