

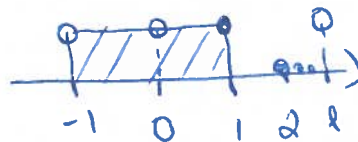
23 de Junho de 2015

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

Questão 1

$$\begin{aligned} a) D &= \{x \in \mathbb{R} : \arcsin x - \frac{\pi}{6} > 0 \wedge -1 \leq x \leq 1 \wedge \arctan(x - \frac{3}{2}) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \arcsin x > \frac{\pi}{6} \wedge -1 \leq x \leq 1 \wedge x - \frac{3}{2} \neq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2} \wedge -1 \leq x \leq 1 \wedge x \neq \frac{3}{2}\} \\ &=]\frac{1}{2}, 1] \end{aligned}$$

$$b) \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^m = e$$



$$\text{int}(B \cup C) =]-1, 0[\cup]0, 1[$$

$$p(B \cup C) = \{-1, 0, 1\} \cup B \cup \{2\}$$

$B \cup C$ não é aberto pois $\text{int}(B \cup C) \neq B \cup C$

$$\begin{aligned} B \cup C \text{ não é fechado pois } \overline{B \cup C} &= \text{int}(B \cup C) \cup p(B \cup C) = \\ &= [-1, 1] \cup B \cup \{2\} \neq B \cup C \end{aligned}$$

$$c) B' = \{2\}$$

$$(B \cup C)' = [-1, 1] \cup \{2\}$$

Exercício 2

(2)

a) Começamos por mostrar que a desigualdade é válida quando $m = 1$.

$$u_1 = 3 \geq \frac{3}{2} \rightarrow \text{hipótese verdadeira}$$

Assumamos agora que a desigualdade é válida para um natural m e mostremos que também é válida para o natural seguinte, $m+1$.

$$\text{Hipótese: } u_m \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Tese: } u_{m+1} \geq \frac{3}{2}$$

Prova da tese:

$$\text{Por hipótese } u_m \geq \frac{3}{2} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{2}{u_m} \leq \frac{2}{3/2} \quad (\Rightarrow) \quad 3 - \frac{2}{u_m} \geq 3 - \frac{4}{3}$$

$$(\Rightarrow) \quad 3 - \frac{2}{u_m} \geq 3 - \frac{4}{3} \quad (\Rightarrow) \quad u_{m+1} \geq \frac{5}{3} \geq \frac{3}{2}$$

$\therefore$ Pelo princípio de indução matemática,

$$u_m \geq \frac{3}{2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(3)

6) A sequência (u_n) é decrescente, logo é monotônica e $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_1 = 3$. Como, pela alínea anterior, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{3}{2}$ temos que (u_n) é limitada.

Como (u_n) monotônica e limitada é convergente.

Designemos o seu limite por L . Sendo (u_{n+1})

uma subsequência de uma sequência convergente,

(u_{n+1}) é convergente, também para L . Assim,

$$\begin{aligned} \lim u_{n+1} = L \text{ mas } \lim u_{n+1} &= \lim \left(3 - \frac{2}{u_n} \right) = \\ &= 3 - \frac{2}{\lim u_n} = 3 - \frac{2}{L}. \end{aligned}$$

Logo,

$$L = 3 - \frac{2}{L} \Leftrightarrow L^2 - 3L + 2 = 0 \wedge L \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow L = 2 \vee L = 1$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{3}{2}$ temos que $L = \lim u_n \geq \frac{3}{2}$.

Assim $L = \lim u_n = 2$.

Questão 3

(4)

a)

$$\lim \frac{a_m m}{\sqrt[m]{(2m)!}} = \lim a_m m \frac{1}{\sqrt[m]{(2m)!}}$$

$$(2m)! > 0, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{(2(m+1))!}{(2m)!} &= \lim \frac{(2m+2)!}{(2m)!} = \lim \frac{\cancel{(2m)!} \cdot (2m+1)(2m+2)}{\cancel{(2m)!}} \\ &= \lim (2m+1)(2m+2) = +\infty \end{aligned}$$

Assim $\lim \sqrt[m]{(2m)!} = +\infty$ pelo que $\lim \frac{1}{\sqrt[m]{(2m)!}} = 0$.

Como $a_m m$ é uma sucessão limitada entre -1 e 1 e o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, podemos concluir que

$$\lim \frac{a_m m}{\sqrt[m]{(2m)!}} = 0.$$

b)

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} m^3 \log(m+1) - m^3 \log(5m+1) &= \\
 = \lim_{m \rightarrow \infty} m^3 \log\left(\frac{m+1}{5m+1}\right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} m^3 \log\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{5+\frac{1}{m}}\right) = \\
 = -\infty &\text{ pois } \lim_{m \rightarrow \infty} \log\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{5+\frac{1}{m}}\right) = \log\left(\frac{1}{5}\right) < 0
 \end{aligned}$$

Questão 4

a)

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a \neq 1}} f(a) = \lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a \neq 1}} \frac{e^{a-1}}{(a-1)^2} = +\infty \text{ logo } f \text{ e}$$

descontínua em $a=1$

b)

Atendendo a que $f(1)=1$ e $\lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a \neq 1}} f(a) = +\infty$ sabemos que $\exists \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \epsilon \Rightarrow f(x) > 1$. Logo f tem um mínimo relativo em $a=1$.

c)

Como $\lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a \neq 1}} f(a) = +\infty$, não é possível definir uma função, contínua em $a=1$, diferindo de f apenas em $a=1$. Logo f não tem uma descontinuidade removível em $a=1$.

Questão 5

(6)

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(x+2) > 0\} =$


$$=]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

b) $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x} - 1 = \frac{2x+2 - x^2 - 2x}{x^2+2x} = \frac{2-x^2}{x^2+2x}$

$$2-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\forall x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$



$$x^2 + 2x > 0, \forall x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

Assim

$x \in]-\infty, -2[\cup]\sqrt{2}, +\infty[\Rightarrow f'(x) < 0$ logo f é decrescente em $]-\infty, -2[$ e em $]\sqrt{2}, +\infty[$

$x \in]0, \sqrt{2}[\Rightarrow f'(x) > 0$ logo f é crescente em $]0, \sqrt{2}[$

Atendendo a que $f'(\sqrt{2}) = 0$ e a monotonia de f , podemos concluir que f tem um máximo relativo em $x = \sqrt{2}$.

(7)

e) f é contínua em $[-3, -2[$ pois é a diferença de duas funções contínuas, a composta de duas funções contínuas (um logaritmo e um polinômio), com um polinômio.

$$f(-3) = \log(9-6) + 3 = \log 3 + 3 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \log(x^2 + 2x) - x = -\infty \text{ logo,}$$

suficientemente perto de $x = -2$, f será negativa.

O Teorema de Bolzano garante então que f tem pelo menos um zero em $]-3, -2[$.

Como f é monótona em $[-3, -2[$ esse zero será único.

Questão 6

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x^2 - 3)}{\arctg(x - 2)} = \frac{\log 1}{\arctg 0} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$\log(x^2 - 3)$ e $\arctg(x - 2)$ são diferenciáveis em $]\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}[$

$$(\arctg(x - 2))' = -\frac{1}{1 + (x - 2)^2} \neq 0, \forall x \in]\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}[$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\log(x^2 - 3))'}{(\arctg(x - 2))'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2 - 3}}{-\frac{1}{1 + (x - 2)^2}} = -4$$

Logo, pela Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x^2 - 3)}{\arctg(x - 2)} = -4.$$

Questão 7

a)

$$f(x) = f(1) + (x - 1)f'(1) + \frac{(x - 1)^2}{2}f''(1) + \frac{(x - 1)^3}{6}f'''(c), \text{ com}$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = 2$$

e entre 1 e x

$f''(1) = 0$ pois f tem um ponto de inflexão em $(1, 0)$.

Assim,

$$f(x) = 2(x - 1) + \frac{(x - 1)^3}{6}f'''(c), \text{ com } c \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

(9)

b)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^3}{6} f'''(c) =$$

$$= -1 - \frac{1}{48} f'''(c)$$

Como $f'''(x) < k$, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $f'''(c) < k$ logo que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > -1 - \frac{k}{48}.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - f(x) - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2(x-1) + (x-1)^2 \varepsilon(x) - x}{x^2 - 1},$$

com $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - f(x) - x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 3x + (x-1)^2 \varepsilon(x)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x-1) + (x-1)^2 \varepsilon(x)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{3}{x+1} + \frac{(x-1)\varepsilon(x)}{x+1} \right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Questão 8

(10)

Considereemos a substituição $a = \sqrt{t^2 - 1} \Rightarrow a^2 = t^2 - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 = t^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = t$$

$$\int_0^1 \frac{a}{(3+a^2)\sqrt{1+a^2}} da = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\cancel{\sqrt{t^2-1}}}{(3+t^2-1)\cancel{\sqrt{t^2-1}}} \cdot \frac{\cancel{t}}{\cancel{\sqrt{t^2-1}}} dt = \int_1^{\sqrt{2}} \underbrace{\frac{1}{2+t^2}}_{\text{função racional}} dt$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{t^2-1})' &= \frac{1}{2} (t^2-1)^{-1/2} \cdot 2t = \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \end{aligned}$$

$$a=0 \Rightarrow t = \sqrt{1} = 1$$

$$a=1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

Questão 9

$$a) \int \frac{x^3 - 4x^2 + 6}{x^2 - x - 2} dx = \int x - 3 - \frac{x}{x^2 - x - 2} dx =$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 6 \\ -x^3 + x^2 + 2x \\ \hline -3x^2 + 2x + 6 \\ +3x^2 - 3x - 6 \\ \hline -x \end{array} \quad \frac{1x^2 - x - 2}{x - 3} = \frac{x^2}{2} - 3x - \int \frac{x}{x^2 - x - 2} dx = *$$

(11)

$$a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\frac{a}{a^2 - a - 2} = \frac{A}{a-2} + \frac{B}{a+1} = \frac{A(a+1) + B(a-2)}{a^2 - a - 2}$$

$$a = A(a+1) + B(a-2)$$

Se $a = 2$ temos $2 = 3A \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}$

Se $a = -1$ temos $-1 = -3B \Leftrightarrow B = \frac{1}{3}$

$$* = \frac{a^2}{2} - 3a - \int \frac{2}{3} \frac{1}{a-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{a+1} da =$$

$$= \frac{a^2}{2} - 3a - \left(\frac{2}{3} \log |a-2| + \frac{1}{3} \log |a+1| \right) + c, \text{ com } c \in \mathbb{R}$$

b) $\int_1^2 x \log x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} \, dx =$

$$f(x) = x \quad f'(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$= 2 \log 2 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 =$$

$$g(x) = \log x \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$= 2 \log 2 - 1 + \frac{1}{4} =$$

$$= 2 \log 2 - \frac{3}{4}$$

Questão 10

(12)

$$2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 - 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 2 - x^2 - (-x) dx + \int_0^1 2 - x^2 - x \operatorname{tg} x dx =$$

$$= \int_{-1}^0 2 - x^2 + x dx + \int_0^1 2 - x^2 - x \operatorname{tg} x dx$$

Questão 11

$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x)}{1-x^2} dx$ é um integral improprio de segunda espécie pois o domínio de integração é limitado mas a função integranda apresenta uma assíntota vertical no domínio de integração (em $x=1$)

$$0 \leq \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x)}{1-x^2}, \forall x \in [0, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x)}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x)}{(1-x)(1+x)} (1-x) = \frac{1}{2} \text{ limitado e}$$

$$\text{não nulo, logo } \int_0^1 \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x)}{1-x^2} dx \text{ e } \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx \text{ têm}$$

a mesma natureza. Assim, sendo $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$

divergente, temos que $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{1-x^2} dx$ também

é divergente.