Análise Matemática I E

Segundo Teste - 9 de Junho de 2015

Nota: Esta é apenas uma de entre muitas possibilidades de resolução.

Pergunta 1

$$\lim_{x \to 3^+} (x-3)^{tg(x-3)} \quad (0^0)$$

$$= \lim_{x \to 3^+} e^{\log\left[(x-3)^{tg(x-3)}\right]} = \lim_{x \to 3^+} e^{tg(x-3)\log(x-3)} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 3^+} tg(x-3)\log(x-3)}$$, porque a função exponencial é contínua.

Determinemos então $\lim_{x \to 3^+} tg(x-3)\log(x-3)$ que conduz a uma indeterminação do tipo $0 \times \infty$.

$$\lim_{x \to 3^+} tg(x-3)\log(x-3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{\log(x-3)}{cotg(x-3)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$\log(x-3)$ e $cotg(x-3)$ são diferenciáveis, por exemplo, em $]3, 3+\pi[$

$$[cotg(x-3)]' = -\frac{1}{sen^2(x-3)} \neq 0, \forall x \in]3, 3+\pi[$$

Como $$\lim_{x \to 3^+} \frac{[\log(x-3)]'}{[cotg(x-3)]'} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\frac{1}{x-3}}{-\frac{1}{sen^2(x-3)}} =$$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} - \dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3} \operatorname{sen}(x-3) = -1 \times 0 = 0$, pela Regra de Cauchy, $\lim\limits_{x \to 3^+} \operatorname{tg}(x-3) \log(x-3) = 0$, logo

$$\lim_{x \to 3^+} (x-3)^{\operatorname{tg}(x-3)} = e^0 = 1.$$

Pergunta 2

a) A função $f(x) = x^2 e^{\frac{x+1}{2}}$ é de classe $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Determinemos as suas duas primeiras derivadas:

$$f'(x) = 2x\, e^{\frac{x+1}{2}} + x^2 e^{\frac{x+1}{2}} \frac{1}{2} = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) e^{\frac{x+1}{2}} \qquad f'(-1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$f''(x) = (x+2) e^{\frac{x+1}{2}} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) e^{\frac{x+1}{2}} \frac{1}{2} = \qquad f(-1) = 1$$

$$= e^{\frac{x+1}{2}} \left(\frac{x^2}{4} + 2x + 2\right)$$

Assim, a fórmula de Taylor com resto de Lagrange de ordem 2 para f, em torno do ponto de abcissa -1 é dada por:

$$x^2 e^{\frac{x+1}{2}} = 1 - \frac{3}{2}(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2} e^{\frac{c+1}{2}} \left(\frac{c^2}{4} + 2c + 2\right), \text{ com}$$

c entre -1 e x.

d) Pela alínea anterior

$$x^2 e^{\frac{x+1}{2}} = \underbrace{1 - \frac{3}{2}(x+1)}_{\substack{\text{equação da} \\ \text{recta tangente} \\ \text{ao gráfico de} \\ f \text{ em } x=-1}} + \underbrace{\frac{(x+1)^2}{2} e^{\frac{c+1}{2}} \left(\frac{c^2}{4} + 2c + 2\right)}_{\substack{\geq 0 \text{ para } x \\ \text{suficientemente próximo} \\ \text{de } -1 \text{ (note-se que} \\ \text{quando } x \text{ está próximo de } -1, \\ \text{o mesmo sucede para } c\text{)}}}$$

Assim, podemos concluir que f tem a concavidade voltada para cima em $x=-1$, pois encontra-se acima da recta tangente para x suficientemente próximo de -1.

e) $f'(0) = 0$

$f''(0) = e^{1/2} \cdot 2 > 0$, logo o Teorema de Taylor garante que f tem um mínimo relativo em 0.

$f''(0) = e^{1/2} \cdot 2 \neq 0$

$f''(1) = e\left(\frac{1}{4} + 2 + 2\right) \neq 0$

logo $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$ não são pontos de inflexão de f

$f'(1) = \left(\frac{1}{2} + 2\right) e \neq 0$ logo f não tem um extremo relativo em 1.

Pergunta 3

a) Consideremos a substituição $\sqrt[6]{x} = t \Leftrightarrow x = t^6$

$$\int_1^{27} \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt[6]{x^5}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^3}{(t^2+1)\cancel{t^5}}\,6\cancel{t^5}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{6t^3}{t^2+1}\,dt =$$

$$\begin{array}{l|l} 6t^3 & t^2+1 \\ \hline -\cancel{6t^3}-6t & 6t \\ -6t & \end{array}$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} 6t - \frac{6t}{t^2+1}\,dt = \left[3t^2 - 3\log(t^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 9 - 3\log 4 - 3 + 3\log 2 = 6 - 3\log(2)$$

b) $$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (x^3+x)\,\text{sen}(x^2)\,dx = \left[-\frac{\cos(x^2)}{2}(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos(x^2)\,dx$$

$f(x) = x\,\text{sen}(x^2)$ $\quad F(x) = -\frac{\cos(x^2)}{2}$

$g(x) = x^2+1$ $\quad g'(x) = 2x$

$$= -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) + \frac{\cos 0}{2} + \left[\frac{\text{sen}(x^2)}{2}\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\text{sen}\,0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

e)

$$\frac{3x+1}{x(2x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+4} = \frac{A(2x^2+4)+(Bx+C)x}{x(2x^2+4)} =$$

$$= \frac{2Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x(2x^2+4)} = \frac{(2A+B)x^2+Cx+4A}{x(2x^2+4)}$$

Assim

$$\begin{cases} 2A+B=0 \\ C=3 \\ 4A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-\frac{1}{2} \\ C=3 \\ A=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Logo

$$\int \frac{3x+1}{x(2x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{4}\frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{2}x+3}{2x^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\log|x| - \frac{1}{8}\int \frac{4x}{2x^2+4}\,dx + \frac{3}{4}\sqrt{2}\int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\log|x| - \frac{1}{8}\log(2x^2+4) + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c,$$

com c constante real

Pergunta 4

Comecemos por determinar as intersecções relevantes.

$$4-(4+x)^2=0 \Leftrightarrow (4+x)^2=4 \Leftrightarrow 4+x=2 \vee 4+x=-2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=-6$$

$|2x|=-2x$ se $x<0$ logo $-2x=6 \Leftrightarrow x=-3$

$$\text{Área} = \int_{-6}^{-3} 6-4+(4+x)^2\,dx + \int_{-3}^{-2} -2x-4+(4+x)^2\,dx +$$
$$+\int_{-2}^{0} -2x\,dx$$

Pergunta 5

$\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x}\,dx$ é um integral impróprio de primeira espécie pois o domínio de integração é um conjunto ilimitado, mas a função integranda não apresenta assimptotas verticais no domínio de integração pois

$$x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1.$$

$$0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x}\right| = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2}, \forall x \in [2,+\infty[$$

Como $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente, temos que $\int_2^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x}\right| dx$ é convergente, pelo que $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x}\,dx$ é absolutamente convergente.

Pergunta 6

a) Uma vez que g é contínua em $\mathbb{R}$, o teorema fundamental do cálculo integral garante que

$$\left(\int_1^x g(t)\,dt \right)' = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$ Assim, pela derivada da função composta,

$$f'(x) = e^{\int_1^x g(t)\,dt} \cdot g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Pelo Teorema da Média, uma vez que g é contínua, temos que

$$\int_1^x g(t)\,dt = g(c)(x-1), \text{ com } c \in [1,x].$$

Como g é decrescente e $1 \leq x \leq 2$ temos que $g(1) \geq g(c) \geq g(2)$.

Assim,

$$f(x) = e^{\int_1^x g(t)\,dt} = e^{g(c)(x-1)} \leq e^{g(1) \cdot 1} = e^{g(1)},$$

$\forall x \in [1,2]$