FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I

Exame de Recurso — 7 de Janeiro de 2016
(Duração 3:00)

1. Considere o conjunto definido por $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{|x^2 - 7x + 12|}{\log(|x| - 1)} > 0 \right\}$. Considere ainda os conjuntos

$$B = (]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[) \setminus \{5, 6\} \quad \text{e} \quad C = \left\{ 4 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

   (a) **[0.5 val.]** Explicite o conjunto A sob a forma de um intervalo ou de uma união de intervalos.

   (b) **[0.5 val.]** Determine o interior e a aderência do conjunto $B \cup C$. Indique, justificando, se $B \cup C$ é um conjunto aberto e/ou um conjunto fechado.

   (c) **[0.5 val.]** Determine o derivado do conjunto C e do conjunto $B \cup C$.

2. Determine o valor dos seguintes limites:

   (a) **[0.8 val.]** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{3}{3 + \sqrt{4n^2 + k}}$

   (b) **[0.5 val.]** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{e^n + 3}{e^{2n} - n} \right)^n$

   (c) **[0.7 val.]** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \log\left(\sqrt{n^2 + 1} + 3\right) - \log\left(\sqrt{n^2 + 5} + 7n\right)$

3. Considere a sucessão crescente, definida por recorrência como:

$$\begin{cases} u_1 &= 2 \\ u_{n+1} &= \sqrt{2u_n + 8}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Utilizando o Princípio de Indução Matemática, prove que $u_n \leq 6, \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) **[0.8 val.]** Prove que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente e determine o valor do respectivo limite.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere a função real de variável real, f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2-x+2}{x-1}, & \text{se } x < 1 \\ \operatorname{arcsen}\left(e^{x^2-4x}\right), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

   (a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.
   (b) **[0.7 val.]** Analise a continuidade de f no ponto $x = 1$.
   (c) **[1.0 val.]** Analise a diferenciabilidade de f.
   (d) **[1.0 val.]** Estude a monotonia de f e, caso existam, determine e classifique os extremos relativos da função.

5. Seja g uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ que satisfaz $g(0) = 1$ e, para uma dada constante real $a \neq 0$,

$$g(x) + g(a) = 2g\left(\frac{x+a}{2}\right) g\left(\frac{x-a}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (a) **[0.7 val.]** Mostre que $g(a) = g(-a)$.
   (b) **[0.8 val.]** Justifique que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g'(c) = 0$.

6. Calcule:

   (a) **[1.2 val.]** $\displaystyle\int \frac{2x^2+4}{x(x-2)^2} dx$
   (b) **[1.0 val.]** $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log(x) dx$

7. **[1.3 val.]** Utilizando uma substituição adequada, escreva o integral seguinte como o integral de uma função racional (<u>não faça o cálculo do seu valor</u>):

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)+1}{\operatorname{sen}^4(x)+2} dx$$

8. **[1.0 val.]** Escreva o integral ou a soma de integrais que permite calcular a área da região limitada compreendida entre os gráficos das funções

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \text{ e } h(x) = -x^2 + 2x + 1$$

   (<u>Não efectue o respectivo cálculo</u>).

9. **[1.0 val.]** Analise a natureza do seguinte integral impróprio:

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}(x^2+1)} dx$$

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

10. Seja f a função de domínio $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ definida por

$$f(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

   (a) **[1.2 val.]** Escreva a fórmula de Taylor de f, com resto de Lagrange de ordem 2, em torno do ponto $x=1$.

   (b) **[1.0 val.]** Utilizando a alínea anterior, calcule o valor do seguinte limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\log 2+\frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}.$$

11. Considere a função definida por:

$$F(x)=\int_1^{\sqrt{x}} t\,\operatorname{arctg}\left(t^6-\alpha\,t^2\right)dt,$$

onde α representa uma constante real.

   (a) **[0.5 val.]** Determine, justificando, o domínio de F.

   (b) **[0.8 val.]** Calcule a função derivada de F, indicando o respectivo domínio de validade. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (c) **[1.0 val.]** Determine o valor de α por forma a que F tenha um ponto de inflexão em $x=1$. Considerando o valor de α determinado, analise o sentido da concavidade de F.

Expressão	Substituição
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\,\cos(t)$ ou $x=a\,\sin(t)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\,\mathrm{sec}(t)$ ou $x=a\,\mathrm{cosec}(t)$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x=a\,\mathrm{tg}(t)$ ou $x=a\,\mathrm{cotg}(t)$
$f(x)=R\left(x,\left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}},\left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}},\ldots,\left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{a\,x+b}{c\,x+d}=t^{\mu}$ $\mu=\text{m.m.c.}\{n,q,\ldots,s\}$
	$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=\sqrt{a}\,x+t$ se $a>0$
$f(x)=R(x,\sqrt{a\,x^2+b\,x+c})$	$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=t\,x+\sqrt{c}$ se $c>0$
	$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=t\,(x-\alpha)$ ou $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=t\,(x-\beta)$ se α e β são zeros reais distintos de $a\,x^2+b\,x+c$
$f(x)=R(\mathrm{sen}(x),\cos(x))$	$\mathrm{tg}(\frac{x}{2})=t$
$f(x)=R(\mathrm{sen}(x),\cos(x))$ $R(-y,-z)=R(y,z),\ \forall y,z$	$\mathrm{tg}(x)=t$
$f(x)=R(e^x)$	$e^x=t$