

Análise Matemática I

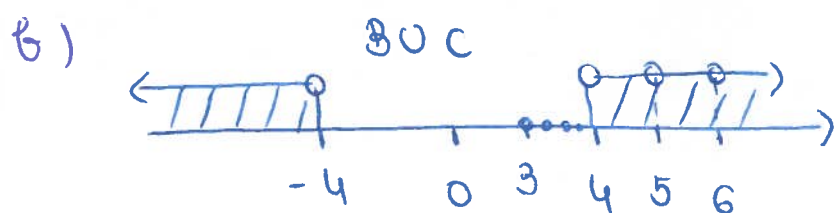
Exame de Recurso - 7/11/2016

Nota: Esta é apenas uma possibilidade de resolução de entre muitas outras.

Pergunta 1

$$\begin{aligned}
 a) \quad \frac{|x^2 - 7x + 12|}{\log(|x| - 1)} > 0 &\Leftrightarrow |x^2 - 7x + 12| \neq 0 \wedge |x| - 1 > 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 \neq 0 \wedge |x| > 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \neq \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \wedge (x < -2 \vee x > 2) \\
 &\Leftrightarrow x \neq \frac{7 \pm 1}{2} \wedge (x < -2 \vee x > 2) \\
 &\Leftrightarrow x \neq 3 \wedge x \neq 4 \wedge (x < -2 \vee x > 2)
 \end{aligned}$$

$$A =]-\infty, -2[\cup]2, 3[\cup]3, 4[\cup]4, +\infty[$$



$$\text{int}(B \cup C) =]-\infty, -4[\cup]4, 5[\cup]5, 6[\cup]6, +\infty[$$

$$f(B \cup C) = C \cup]-4, 4[\cup]5, 6[$$

$$\overline{B \cup C} =]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[\cup C$$

$B \cup C$ não é aberto pois $3 \in B \cup C$ mas $3 \notin \text{int}(B \cup C)$

$B \cup C$ não é fechado pois $4 \in \overline{B \cup C}$ mas $4 \notin B \cup C$

$$c) C' =]44[$$

$$(DVC)' =]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$$

Pergunta 2

a)

$$(n+1-3+1) \frac{3}{3 + \sqrt{4n^2 + n+1}} \leq \sum_{k=3}^{n+1} \frac{3}{3 + \sqrt{4n^2 + k}} \leq$$

$$\leq \frac{3}{3 + \sqrt{4n^2 + 3}} (n+1-3+1), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3}{3 + \sqrt{4n^2 + n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{n}}{\frac{3}{n} + \sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3}{3 + \sqrt{4n^2 + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{n}}{\frac{3}{n} + \sqrt{4 + \frac{3}{n^2}}} = \frac{3}{2}$$

Assim, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{3}{3 + \sqrt{4n^2 + k}} = \frac{3}{2}$$

(3)

b)

$$\lim \left(\frac{x^m + 3}{x^{2m} - m} \right)^m = \lim \left(\frac{1 + \frac{3}{x^m}}{x^m - \frac{m}{x^m}} \right)^m = 0$$

c)

$$\lim \log(\sqrt{m^2+1} + 3) - \log(\sqrt{m^2+5} + 4m) =$$

$$= \lim \log \left(\frac{\sqrt{m^2+1} + 3}{\sqrt{m^2+5} + 4m} \right) =$$

$$= \log \left(\lim \frac{\sqrt{m^2+1} + 3}{\sqrt{m^2+5} + 4m} \right) = \log \left(\lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} + \frac{3}{m}}{\sqrt{1 + \frac{5}{m^2}} + 4} \right) =$$

$$= \log \left(\frac{1}{8} \right)$$

Pergunta 3

a) Mostremos que a desigualdade é válida para $m=1$.

$$u_1 = 2 \leq 6 \rightarrow \text{proposição verdadeira}$$

Assumamos agora que a desigualdade é válida para o natural m e mostremos que também é válida para o natural $m+1$.

Hipótese: $u_m \leq 6$

Tese: $u_{m+1} \leq 6$

Prova da tese:

$$u_{m+1} = \sqrt{2u_m + 8} \leq \sqrt{2 \times 6 + 8} = \sqrt{20} < \sqrt{36} = 6$$

↳ pela hipótese
de indução

Pelo Princípio de Indução Matemática conclui-se
que $u_m \leq 6, \forall m \in \mathbb{N}$.

b) (u_m) é uma sucessão crescente logo é monótona

Pela alínea anterior e sabendo que (u_m) é crescente,
podemos afirmar que

$$2 \leq u_m \leq 6, \forall m \in \mathbb{N}, \text{ ou seja, } (u_m) \text{ é}$$

limitada. Sendo uma sucessão monótona e
limitada, (u_m) é convergente. Seja L o valor do
seu limite.

(u_{m+1}) é subsucessão da sucessão convergente (u_m) , logo
é convergente também para L .

(5)

Assim

$$L = \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2u_n + 8} = \sqrt{2 \lim u_n + 8} = \sqrt{2L + 8}$$

logo

$$L^2 = 2L + 8 \Leftrightarrow L^2 - 2L - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix}$$

Como

$$\forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq 2 \Rightarrow \lim u_m \geq 2$$

donde

$$\lim u_m = L = 4.$$

Pergunta 4

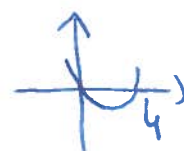
a) Para $x < 1$, $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Para $x \geq 1$, $-1 \leq e^{x^2 - 4x} \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1 \leq e^{x^2 - 4x} \wedge e^{x^2 - 4x} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x(x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [0, 4]$$



Assim

$$D =]-\infty, 1[\cup [1, 4] =]-\infty, 4]$$

b)

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a < 1}} f(a) = \lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a < 1}} \frac{-a^2 - a + 2}{a-1} = \lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a < 1}} - \frac{(a-1)(a+2)}{a-1} = -3$$

$$-a^2 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a > 1}} f(a) = \lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a > 1}} \arccos(e^{a^2-4a}) = \arccos(e^{-3})$$

Como

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a < 1}} f(a) \neq \lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a > 1}} f(a), \quad f \text{ é descontínua}$$

em $a=1$.

c) Como f não é contínua em $a=1$, f não é diferenciável em $a=1$.

Para $a < 1$, f é diferenciável porque é um polinômio

$$\left(\frac{-a^2 - a + 2}{a-1} \right)' = [-(a+2)]' = -1$$

(7)

Para $a \in]1, 4[$, f é diferenciável porque é a composta de funções diferenciáveis (um arco seno, uma exponencial e um polinômio)

$$(\arcsin(e^{x^2-4x}))' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^{x^2-4x})^2}} e^{x^2-4x} (2x-4)$$

$\therefore f$ é diferenciável em $]-\infty, 1[\cup]1, 4[$

d)

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-(e^{x^2-4x})^2}} e^{x^2-4x} (2x-4), & \text{se } 1 < x < 4 \end{cases}$$

	1	2	4
f'	-	-	+
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

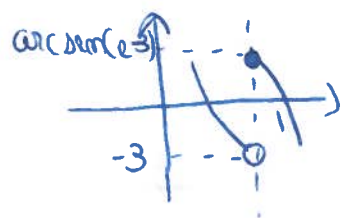
f é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, 2[$

f é crescente em $]2, 4[$

f tem um mínimo relativo em $a = 2$

f tem um máximo relativo em $a = 4$

Para $x = 1$



Assim, f tem um máximo relativo em $x = 1$

Pergunta 5

a)

$$g(-a) + g(a) = 2g\left(\frac{-a+a}{2}\right)g\left(\frac{-a-a}{2}\right) = 2g(0)g(-a) = 2g(-a)$$

$$\text{pois } g(0) = 1$$

Assim

$$g(-a) + g(a) = 2g(-a) \Rightarrow g(a) = g(-a)$$

b) g é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

Subindo, sem perda de generalidade que $a > 0$, g é contínua em $[-a, a]$ e diferenciável em $] -a, a[$.

Como $g(a) = g(-a)$, o Teorema de Rolle garante que

$$\exists c \in] -a, a[: g'(c) = 0.$$

Pergunta 6

$$a) \frac{2x^2 + 4}{2(x-2)^2} = \frac{A}{2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2)^2 + B + C(x-2)}{2(x-2)^2}$$

Assim

$$2x^2 + 4 = A(x-2)^2 + B + C(x-2)$$

Se $x = 0$ temos

$$4 = 4A \Rightarrow A = 1$$

Se $x = 2$ temos

$$12 = 2B \Rightarrow B = 6$$

Se $a = 1$ vem

(9)

$$6 = 1 + 6 - C \Rightarrow C = 1$$

Desta forma

$$\int \frac{2a^2 + 4}{a(a-2)^2} da = \int \frac{1}{a} + \frac{6}{(a-2)^2} + \frac{1}{a-2} da =$$

$$= \log |a| - \frac{6}{a-2} + \log |a-2| + c, \text{ com } c \text{ constante real}$$

$$b) \int_1^2 a^3 \log a \, da = \left[\frac{a^4}{4} \log a \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{a^3}{4} da =$$

$$f(a) = a^3 \quad F(a) = \frac{a^4}{4}$$

$$g(a) = \log a \quad g'(a) = \frac{1}{a}$$

$$= 4 \log 2 - \left[\frac{a^4}{16} \right]_1^2 =$$

$$= 4 \log 2 - 1 + \frac{1}{16} =$$

$$= 4 \log 2 - \frac{15}{16}$$

Pergunta 4

Como a função é par em coseno e seno, consideramos a substituição $\operatorname{tg} a = t$.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{t^2 + 1}$$

(10)

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{t^2}{t^2 + 1} \Rightarrow \sin^4 a = \frac{t^4}{(t^2 + 1)^2}$$

Se $a = 0 \Rightarrow t = \tan 0 = 0$

$$\tan a = t \Leftrightarrow a = \arctan t$$

Se $a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

Então

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 a + 1}{\sin^4 a + 2} da = \int_0^1 \frac{\frac{1}{t^2 + 1} + 1}{\frac{t^4}{(t^2 + 1)^2} + 2} \cdot \frac{1}{1 + t^2} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{1 + t^2 + 1}{t^2 + 1}}{\frac{t^4 + 2(t^4 + 2t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^2}} \cdot \frac{1}{1 + t^2} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^2 + 2}{\underbrace{3t^4 + 4t^2 + 2}_{\text{função racional}}} dt$$

Pergunta 8

11

$$x^3 - 2x^2 + 1 = -x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-1}^0 x^3 - 2x^2 + 1 - (-x^2 + 2x + 1) dx \right| + \\ &+ \left| \int_0^2 x^3 - 2x^2 + 1 - (-x^2 + 2x + 1) dx \right| \end{aligned}$$

Pergunta 9

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} dx \text{ é um integral improprio misto}$$

pois o domínio de integração é ilimitado e a função integranda é ilimitada no domínio de integração.

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} dx = \underbrace{\int_3^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} dx}_{\text{integral improprio de 2º especie}} + \underbrace{\int_4^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} dx}_{\text{integral improprio de 1º especie}}$$

(12)

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} \neq 0, \forall x \in]3, 4]$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{10} \text{ finito e}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

não nulo, logo $\int_3^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} dx$ e $\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$ têm

a mesma natureza. Assim $\int_3^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} dx$ é convergente

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} \neq 0, \forall x \in [4, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{x}} (1+\frac{1}{x^2})} :$$

$$\frac{1}{x^2}$$

= 1 finito e não nulo

Assim $\int_4^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} dx$ e $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ têm a mesma

natureza pelo que $\int_4^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} dx$ é convergente.

$\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3} (x^2+1)} dx$ é convergente pois corresponde à soma

de dois integrais impropriais convergentes.

Pergunta 10

(13)

$$1) f \in C^\infty(Df)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2 + x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(x^2 + x)^2} (2x + 1)$$

Assim $f(1) = \log 2$

$$f'(1) = -\frac{1}{2}$$

heio que a fórmula de Taylor de f , com resto de Lagrange de ordem 2, em torno de $x=1$ será

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log 2 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} \frac{2e+1}{(e^2+e)^2}, \text{ com}$$

entre 1 e x

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \log 2 + \frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{\log 2} - \frac{1}{2}\cancel{(x-1)} + \frac{\cancel{(x-1)^2}}{2} \frac{2e+1}{(e^2+e)^2} - \cancel{\log 2} + \frac{1}{2}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2e+1}{(e^2+e)^2} = \frac{3}{8} \text{ pois como } e \text{ está entre } 1 \text{ e } x,$$

quando $x \rightarrow 1 \Rightarrow e \rightarrow 1$

Pergunta 11

a) $x \arctg(x^6 - x^2)$ tem domínio $\mathbb{R}$ o que significa que não é necessário impor qualquer restrição à variação de x basta que a função integranda esteja definida.

$\sqrt{x}$ só está definida em $\mathbb{R}_0^+$

Assim $D_F = \mathbb{R}_0^+$

b) $x \arctg(x^6 - x^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$ pois é o produto de duas funções contínuas (um polinômio e a composta de duas funções contínuas).

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral

sabemos que $H(x) = \int_1^x t \arctg(t^6 - t^2) dt$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $H'(x) = x \arctg(x^6 - x^2)$

$\sqrt{x}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$. Como $F(x) = H(\sqrt{x})$,

temos que

$$\begin{aligned} F'(x) &= H'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' = \sqrt{x} \arctg(x^3 - x) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{\arctg(x^3 - x)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

e) Se F tem um ponto de inflexão em $x=1$, uma vez que F admite segunda derivada, $F''(1)=0$

$$F''(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+(x^3-dx)^2} (3x^2-d)$$

$$F''(1)=0 \Leftrightarrow \frac{3-d}{2(1+(1-d)^2)} = 0 \Leftrightarrow d=3$$

Considerando agora $d=3$, temos

$$F''(x) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{1+(x^3-3x)^2}}_{\text{sempre positiva}} 3(x^2-1)$$

sempre positiva

Logo o sinal de F'' corresponde ao sinal de x^2-1 .

	0		1	
F''		-	0	+
F		$\cap$		$\cup$

F tem a concavidade voltada para baixo em $]0,1[$

F tem a concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$

F tem um ponto de inflexão igual a $(1,0)$ pois F

tem mudança do sentido da concavidade em $x=1$ e

é diferenciável em $x=1$