FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I

1º Teste — 4 de Novembro de 2015
(Duração 1:30)

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{\operatorname{arcsen}(x^2-1)}{\log(x-1)}$ e designe por A o respectivo domínio. Considere ainda os conjuntos

$$B =]1,2] \quad \text{e} \quad C = \left\{(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

   (a) **[1.0 val.]** Explicite o conjunto A sob a forma de um intervalo ou de uma união de intervalos.

   (b) **[1.0 val.]** Determine o interior e a fronteira do conjunto $B \cup C$. Indique, justificando, se $B \cup C$ é um conjunto aberto.

   (c) **[1.0 val.]** Determine a aderência e o derivado de $B \cup C$. Indique, justificando, se $B \cup C$ é um conjunto fechado.

2. Determine o valor dos seguintes limites:

   (a) **[1.5 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-5}\right)^{n^2}$

   (b) **[2.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos(n^2+2)\frac{5+\sqrt{n^2+2}}{n^2-\sqrt{n+1}\sqrt{n+3}}$

3. Considere a sucessão definida por:

$$u_n = \frac{n!}{n^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   (a) **[2.0 val.]** Utilizando o Princípio de Indução Matemática, prove que:

$$n! \leq n^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (b) **[1.5 val.]** Recorrendo à desigualdade anterior, calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Seja f a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x-1) - \log(x^2+x-2) & \text{, se } x > 1 \\ \\ e^{\frac{1}{x-1}} - \log(3) & \text{, se } x < 1 \end{cases}$$

(a) **[1.5 val.]** Analise a continuidade de f.

(b) **[2.0 val.]** Verifique se é possível prolongar f por continuidade ao ponto 1. Caso seja possível, defina a respectiva função prolongamento.

5. Considere a função g, real de variável real, definida por

$$g(x) = \operatorname{arctg}(x^2) - \log(1+x^2).$$

(a) **[2.0 val.]** Justifique, detalhadamente, que a função g não pode ter mais do que quatro zeros.

(b) **[1.0 val.]** Mostre que a função g é par.

(c) **[1.5 val.]** Analise a monotonia de g em $\mathbb{R}^+$.

(d) **[2.0 val.]** Determine o número exacto de zeros de g.