Análise Matemática I

Primeiro Teste - 4/11/2015

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

Exercício 1

a) $A=\{x\in\mathbb{R}: -1\leq x^2-1\leq 1 \wedge \log(x-1)\neq 0 \wedge x-1>0\}$

$-1\leq x^2-1\leq 1 \wedge \log(x-1)\neq 0 \wedge x-1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\leq x^2\leq 2 \wedge x-1\neq 1 \wedge x>1 \Leftrightarrow$

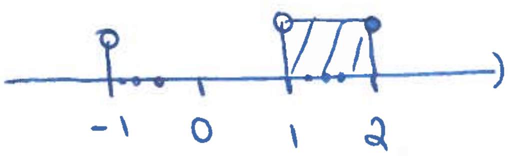
$\Leftrightarrow x^2\leq 2 \wedge x\neq 2 \wedge x>1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}] \wedge x\neq 2 \wedge x>1$

$\Leftrightarrow x\in\,]1,\sqrt{2}]$

$A=\,]1,\sqrt{2}]$

b) $(-1)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\begin{cases}1+\left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{se } n \text{ é par}\\ -1+\left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{se } n \text{ é ímpar}\end{cases}$



c) Representação simplificada de $B\cup C$

$\text{int}(B\cup C)=\,]1,2[$

$\text{fr}(B\cup C)=\left\{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{-1,1,2\}$

$B\cup C$ não é aberto pois $B\cup C\neq \text{int}(B\cup C)$ (por exemplo, $2\in B\cup C$ mas $2\notin \text{int}(B\cup C)$)

c)

$$\overline{B\cup C} = (B\cup C)\cup fr(B\cup C) = \{-1\}\cup\left\{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1},\ n\in\mathbb{N}\right\}\cup[1,2]$$

$$(B\cup C)' = \{-1\}\cup[1,2]$$

$B\cup C$ não é fechado pois $B\cup C \neq \overline{B\cup C}$ (por exemplo, $-1\in\overline{B\cup C}$ mas $-1\notin B\cup C$)

Exercício 2

a)

$$\lim\left(\frac{3n^2+1}{3n^2-5}\right)^{n^2} = \lim\left(\frac{3n^2-5+6}{3n^2-5}\right)^{n^2} =$$

$$= \lim\left[\left(1+\frac{6}{3n^2-5}\right)^{3n^2-5}\right]^{\frac{n^2}{3n^2-5}} \underset{*}{=} \left(e^6\right)^{1/3} = e^2$$

* Pois $\lim \dfrac{n^2}{3n^2-5} = \lim \dfrac{1}{3-\frac{5}{n^2}} = \dfrac{1}{3}$

b)

$$\lim \frac{5+\sqrt{n^2+2}}{n^2-\sqrt{n+1}\sqrt{n+3}} = \lim \frac{\frac{5}{n^2}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}}}{1-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}} = \frac{0}{1} = 0$$

$\cos(n^2+2)$ está limitado entre -1 e 1

Como o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, temos que

$$\lim \cos(n^2+2)\,\frac{5+\sqrt{n^2+2}}{n^2-\sqrt{n+1}\sqrt{n+3}} = 0$$

Exercício 3

a) Comecemos por mostrar que a desigualdade é válida para o primeiro natural

$$1! = 1 \leq 1 = 1^{1-1}$$ → proposição verdadeira

Suponhamos agora que a desigualdade é válida para o natural n e mostremos que também é válida para o natural $n+1$.

Hipótese: $n! \leq n^{n-1}$

Tese: $(n+1)! \leq (n+1)^{n}$

Prova da tese:

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por hipótese}}}{\leq} n^{n-1}(n+1) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{pois } n < n+1}}{<} (n+1)^{n-1}(n+1) = (n+1)^{n}$$

Pelo Princípio de Indução Matemática

$$n! \leq n^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b)

$$0 < \frac{n!}{n^{n}} \leq \frac{n^{n-1}}{n^{n}} = \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\lim 0 = 0$

$\lim \frac{1}{n} = 0$

Pelo Teorema das sucessões enquadradas, $\frac{n!}{n^{n}}$ é convergente e

$$\lim \frac{n!}{n^{n}} = 0.$$

Exercício 4

a) Para $x > 1$ a função é contínua pois é definida como a diferença de duas funções contínuas (a composta de duas funções contínuas, um logaritmo e um polinómio, em ambos os casos).

Para $x < 1$ a função é contínua pois é definida como a diferença de duas funções contínuas (a composta de duas funções contínuas, a exponencial e o inverso numérico de um polinómio, e uma constante).

b) É possível prolongar f por continuidade ao ponto 1 se existir

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} f(x) .$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} - \log 3 = 0 - \log 3 = -\log 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \log(x-1) - \log(x^2+x-2) =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \log\left(\frac{x-1}{x^2+x-2}\right) = \lim_{x \to 1^+} \log\left(\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+2)}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log 3$$

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Assim

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\log 3$$, pelo que é possível

prolongar f por continuidade ao ponto 1.

Seja $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o respectivo prolongamento. Então:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \log(x-1) - \log(x^2+x-2) & , \text{ se } x > 1 \\ -\log 3 & , \text{ se } x = 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} - \log 3 & , \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Exercício 5

a) g tem domínio $\mathbb{R}$ pois $1+x^2 > 0$ e é diferenciável em $\mathbb{R}$ pois é a diferença de duas funções diferenciáveis, que resultam da composição de funções diferenciáveis (um arcotangente com um polinómio e um logaritmo com um polinómio)

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x =$$

$$= 2x \left(\frac{\cancel{1} + x^2 - \cancel{1} - x^4}{(1+x^4)(1+x^2)} \right) =$$

$$= \frac{2x^3(1-x^2)}{(1+x^4)(1+x^2)} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3(1-x^2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm 1$

Como g' tem exactamente três zeros, um dos corolários do Teorema de Rolle garante que g tem no máximo quatro zeros.

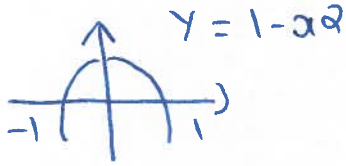
b)

$g(-x)= \operatorname{arctg}((-x)^2)-\log(1+(-x)^2) =$

$= \operatorname{arctg}(x^2) - \log(1+x^2) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ logo g é uma função par.

c)

$$g'(x) = \frac{\overbrace{2x^3}^{>0}(1-x^2)}{\underbrace{(1+x^4)}_{>0}\underbrace{(1+x^2)}_{>0}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$



$g'(x)>0$ em $]0,1[$ logo g é crescente em $]0,1[$

$g'(x)<0$ em $]1,+\infty[$ logo g é decrescente em $]1,+\infty[$

d) Pela alínea a), g não pode ter mais do que quatro zeros. Pela alínea b), g é par e $g(0)=\operatorname{arctg} 0 - \log 1 = 0$ logo g tem um número ímpar de zeros. Assim g terá um ou três zeros.

Como $g(0)=0$ e g é crescente em $]0,1[$, g tomará valores positivos em $]0,1[$. Por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x^2) - \log(1+x^2) = \frac{\pi}{2} - \infty = -\infty$$

Atendendo à continuidade de g (g é diferenciável em $\mathbb{R}$ logo é contínua em $\mathbb{R}$), para x suficientemente grande temos $g(x)<0$.

O Teorema de Bolzano garante então a existência de um zero de g em $]0,+\infty[$.

Assim, g tem exactamente três zeros.