FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

# Análise Matemática I

**2º Teste — 16 de Dezembro de 2015**
**(Duração 1:30)**

1. Calcule:

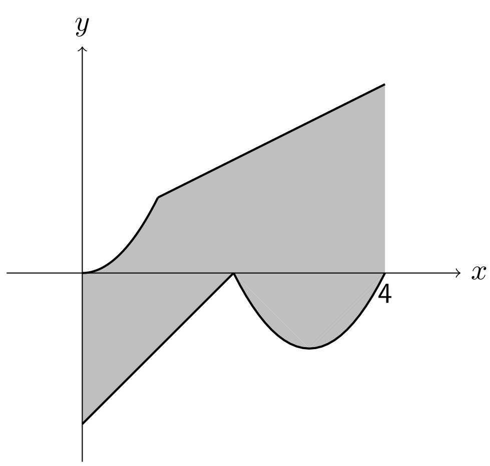
   (a) **[2.5 val.]** $\displaystyle\int \frac{9-3x}{x^3+9x}dx$

   (b) **[2.0 val.]** $\displaystyle\int_0^1 x^5 e^{x^3} dx$

2. **[2.5 val.]** Utilizando uma substituição adequada, escreva o integral seguinte como o integral de uma função racional (<u>não faça o cálculo do seu valor</u>):

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[4]{x+2}+1}dx$$

3. **[2.5 val.]** Considere a figura abaixo, limitada pelas gráficos das funções $f(x) = x-2$, $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)$, $h(x) = x^2-6x+8$ e $i(x) = x^2$, no intervalo $[0,4]$. Represente a área da região sombreada sob a forma de um integral ou de uma soma de integrais (<u>não efectue o respectivo cálculo</u>).




$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. **[2.0 val.]** Recorrendo à definição de integral impróprio, analise a convergência do integral:

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

5. Considere a função definida por:

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{arctg}(x)} \cos\left(t^2\right) dt.$$

(a) **[2.0 val.]** Justifique que $F$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine a respectiva função derivada.

(b) **[2.5 val.]** Calcule, justificando, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\log(1+x^2)}$$

6. Seja $\alpha$ uma constante real e $f$ a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = e^{\alpha x} + \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) x^2.$$

(a) **[2.0 val.]** Escreva a fórmula de MacLaurin de $f$ com resto de Lagrange de ordem 3.

(b) **[2.0 val.]** Averigúe se existe um ou mais valores de $\alpha$ para o quais $f$ tenha um ponto de inflexão em $x = 0$.

| Expressão | Substituição |
|---|---|
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a\,\cos(t)$ ou $x = a\,\sin(t)$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a\,\mathsf{sec}(t)$ ou $x = a\,\mathsf{cosec}(t)$ |
| $\sqrt{x^2 + a^2}$ | $x = a\,\mathsf{tg}(t)$ ou $x = a\,\mathsf{cotg}(t)$ |
| $f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$ | $x = t^\mu$<br>$\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$ |
| $f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$ | $\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^\mu$<br>$\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$ |
| $f(x) = R(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c})$ | $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \sqrt{a}\,x + t$<br>se $a > 0$ |
| | $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,x + \sqrt{c}$<br>se $c > 0$ |
| | $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \alpha)$<br>ou $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \beta)$<br>se $\alpha$ e $\beta$ são zeros reais |