Análise Matemática I

2º Teste - 16/12/2015

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

Pergunta 1

a)

$$\frac{9-3x}{x^3+9x} = \frac{9-3x}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9-3x}{x(x^2+9)} = \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)x}{x(x^2+9)}$$

Assim,

$$9-3x = A(x^2+9)+(Bx+C)x = (A+B)x^2+Cx+9A$$

Donde

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=-3 \\ 9A=9 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ C=-3 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{9-3x}{x^3+9x}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x+3}{x^2+9}\,dx =$$

$$= \log|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{1/3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+9) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c,$$

com c constante real

b) $\int_0^1 x^5 e^{x^3} dx = \int_0^1 x^3 x^2 e^{x^3} dx = \left[x^3 \frac{e^{x^3}}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx =$ ②

$f(x) = x^2 e^{x^3}$ $\quad F(x) = \int f(x)dx = \frac{e^{x^3}}{3}$

$= \frac{e}{3} - \left[\frac{e^{x^3}}{3}\right]_0^1 =$

$g(x) = x^3 \quad g'(x) = 3x^2$

$= \frac{e}{3} - \frac{e}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Pergunta 2

$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[4]{x+2}+1} dx = \int_0^1 \frac{t^4}{t^3+1} 12t^{11} dt = \int_0^1 \underbrace{\frac{12t^{15}}{t^3+1}}_{\text{função racional}} dt$

$x+2 = t^{12} \Leftrightarrow x = t^{12} - 2 = \varphi(t)$

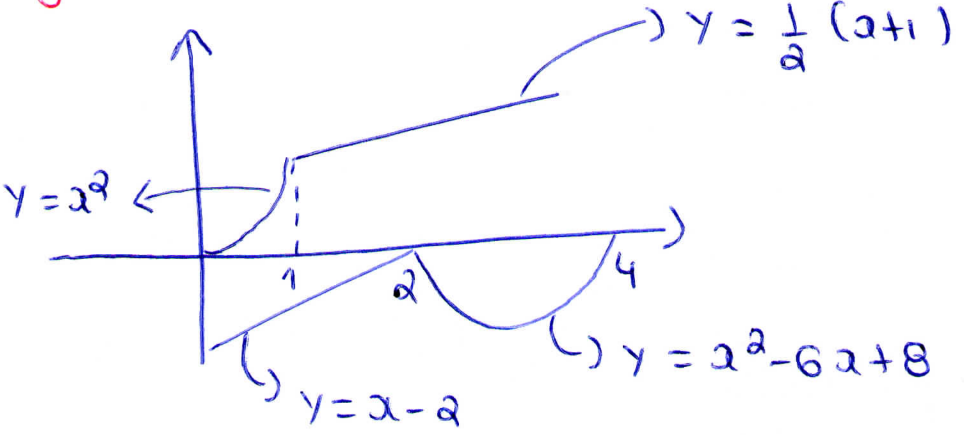
$\varphi'(t) = 12t^{11}$

$x+2 = t^{12} \underset{x+2 \geq 0}{\Leftrightarrow} t = \sqrt[12]{x+2}$

Se $x = -2 \Rightarrow t = 0$

Se $x = -1 \Rightarrow t = 1$

Pergunta 3



$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

$x^2 = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$

$= \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\text{Área} = \int_0^1 x^2 - x + 2 \, dx + \int_1^2 \frac{1}{2}(x+1) - x + 2 \, dx +$

$+ \int_2^4 \frac{1}{2}(x+1) - x^2 + 6x - 8 \, dx$

Pergunta 4

$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ é um integral impróprio de primeira espécie pois o domínio de integração é um conjunto ilimitado mas a função integranda é limitada em qualquer subconjunto limitado do domínio de integração

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = \lim_{x \to +\infty} \int_{-1}^{x} \frac{t}{1+t^4} dt =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(t^2) \right]_{-1}^{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Logo $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ é convergente.

Pergunta 5

a) Como $\cos(t^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que

$$H(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$H'(x) = \cos(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$F(x) = H(\operatorname{arctg} x)$ logo pela regra de derivação da função composta, uma vez que H e o arcotangente são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, temos

$$F'(x) = H'(\operatorname{arctg} x)\,(\operatorname{arctg} x)' =$$

$$= \cos(\operatorname{arctg}^2 x)\,\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{\log(1+x^2)} = \frac{0}{0}$$ pois $\int_0^0 \cos(t^2)\,dt = 0$

$F(x)$ e $\log(1+x^2)$ são diferenciáveis em $]0,1[$

$$[\log(1+x^2)]' = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x \neq 0, \quad \forall x \in]0,1[$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F'(x)}{[\log(1+x^2)]'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(\operatorname{arctg}^2 x)\,\cancel{\frac{1}{1+x^2}}}{\cancel{\frac{1}{1+x^2}}\cdot 2x} = +\infty$$

Pela Regra de Cauchy, como $\lim_{x \to 0^+} \frac{F'(x)}{[\log(1+x^2)]'}$

existe, $\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{\log(1+x^2)}$ também existe e

toma o mesmo valor. Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{\log(1+x^2)} = +\infty$$

Pergunta 6

a) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ pois é a soma da composta da função exponencial com um polinómio, com outro polinómio

$f(x) = e^{\alpha x} + (\alpha - \frac{3}{2}) x^2$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha e^{\alpha x} + (2\alpha - 3)x$ $\quad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} + 2\alpha - 3$ $\quad f''(0) = \alpha^2 + 2\alpha - 3$

$f'''(x) = \alpha^3 e^{\alpha x}$

$f(x) = 1 + \alpha x + (\alpha^2 + 2\alpha - 3)\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha^3 e^{\alpha c}}{6} x^3$, com

c entre 0 e x

b)

Se f tem um ponto de inflexão em $x=0$,

com $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $f''(0)=0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$ então $f'''(0) = 1 \neq 0$

Se $\alpha = -3$ então $f'''(0) = -27 \neq 0$

Assim, como f''' é uma derivada de ordem ímpar, podemos concluir que f tem efectivamente um ponto de inflexão em $x=0$, para qualquer um dos dois valores determinados para α.