Época de recurso de
Análise Matemática I
24/06/2016

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possíveis.

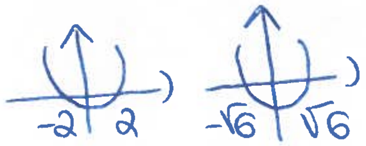
Exercício 1

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq |x^2 - 5| \leq 1 \wedge x^2 - 5 \neq 0\}$

$-1 \leq |x^2-5| \leq 1 \wedge x^2-5 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x^2-5| \leq 1 \wedge x^2 \neq 5 \Leftrightarrow -1 \leq x^2-5 \leq 1 \wedge x \neq \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 6 \wedge x \neq \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow$

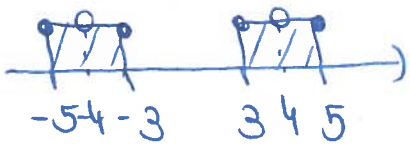


$\Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \wedge x^2 - 6 \leq 0 \wedge x \neq \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{6}, -2] \cup [2, \sqrt{6}] \wedge x \neq \pm\sqrt{5}$

$A = [-\sqrt{6}, -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, \sqrt{6}]$

b)



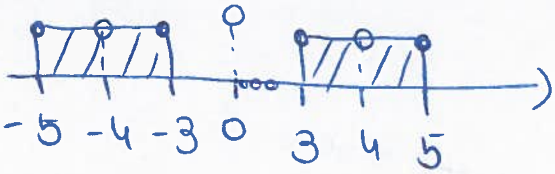
$\text{int}(C) =]-5,-4[\cup]-4,-3[\cup]3,4[\cup]4,5[$

$\text{fr}(C) = \{-5,-4,-3,3,4,5\}$

$\overline{C} = C \cup \text{fr}(C) = [-5,-3] \cup [3,5]$

C não é fechado pois $4 \in \overline{C}$ mas $4 \notin C$ logo $C \neq \overline{C}$

c)



$\text{int}(C\cup B) =]-5,-4[\cup]-4,-3[\cup]3,4[\cup]4,5[$

$\text{fr}(C\cup B) = \{-5,-4,-3,0,3,4,5\} \cup B$

$\overline{C\cup B} = [-5,-3] \cup [3,5] \cup B \cup \{0\}$

$C\cup B$ não é aberto pois $-5 \in C\cup B$ mas $-5 \notin \text{int}(C\cup B)$ logo

$$C\cup B \neq \text{int}(C\cup B)$$

d) $(C\cup B)' = [-5,-3] \cup [3,5] \cup \{0\}$

Exercício 2

a) $$\lim \left(\frac{n^2+4}{n^2+n}\right)^n = \lim \frac{\left[\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{(e^4)^0}{e} = \frac{1}{e}$$

b)

$$\lim \frac{2^n+3}{3^n+2} \text{ sen}\left(\frac{3^n+2}{2^n+3}\right)$$

$\text{sen}\left(\frac{3^n+2}{2^n+3}\right)$ é limitada entre -1 e 1

$$\lim \frac{2^n+3}{3^n+2} = \lim \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}} = 0$$

Como o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, temos $\lim \left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right) \text{sen}\left(\frac{3^n+2}{2^n+3}\right) = 0$

Exercício 3

a) Comecemos por mostrar que a desigualdade é válida para $n = 1$.

$1 \geq \sqrt{1} = 1$ -> proposição verdadeira

Assumamos agora que a desigualdade é válida para o natural n e mostremos que é válida para $n+1$.

Hipótese: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

Tese: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$

Prova da tese:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underbrace{\geq}_{\text{pela hipótese}} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \geq n+1 \Leftrightarrow \sqrt{n}\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}\sqrt{n} \rightarrow$$

proposição verdadeira

b) Pela alínea anterior

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\lim \sqrt{n} = +\infty$. Assim, $\lim \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

Exercício 4

a)

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\leq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\leq 0}} \cos(x^2)+\log(x^2+1) = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} 2\,\frac{e^{2x}-1}{2x} = 2$$

Como os limites anteriores são diferentes, f não é contínua em $x=0$. Não sendo contínua, também não é diferenciável em $x=0$.

b) Para $x<0$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x + \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

Para $x>0$

$$f'(x) = \frac{x\,e^{2x}\,2 - e^{2x}+1}{x^2}$$

Assim

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x + \dfrac{2x}{x^2+1}, & \text{se } x<0 \\ \dfrac{2x\,e^{2x}-e^{2x}+1}{x^2}, & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Exercício 5

Consideremos $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$

$f \in C^2(\mathbb{R})$ logo f e f' são contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$

e^x é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

Sendo g o produto entre funções contínuas em $\mathbb{R}$

(a exponencial e a diferença de duas funções contínuas),

g é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, g é contínua em $[a, b]$.

Sendo g o produto entre funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$

(a exponencial e a diferença de duas funções diferenciáveis),

g é diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, g é diferenciável em $]a, b[$.

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = e^a(f(a) - f'(a)) = 0 \\ g(b) = e^b(f(b) - f'(b)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(a) = g(b)$$

Pelo Teorema de Rolle,

$$\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^c(f(c) - f'(c)) + e^c(f'(c) - f''(c)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^c(f(c) - f''(c)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(c) = f''(c)$$

Exercício 6

a) f é contínua em $\mathbb{R}$ porque é um polinómio.

$f(0)=1 \quad >0$

$f(1)=1-\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2} <0$

Pelo Teorema de Bolzano,

$$\exists c \in]0,1[: f(c)=0$$

b) $f(c)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{c}{2}-c^3=0 \Leftrightarrow 1-\frac{c}{2}=c^3$

$g(c)=1-\frac{c}{2}-c^4=c^3-c^4=\underbrace{c^3}_{>0}(\underbrace{1-c}_{>0 \text{ pois } c\in]0,1[}) >0$

Exercício 7

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2-6x+2}{(x^2+1)(x-2)}\,dx$

$\dfrac{5x^2-6x+2}{(x^2+1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1} = \dfrac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}$

$5x^2-6x+2 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$

Se $x=2$ $\quad 10=5A \Leftrightarrow A=2$

Se $x=0$ $\quad 2=2-2C \Leftrightarrow C=0$

Se $x=1$ $\quad 1=4+B(-1) \Leftrightarrow B=3$

$$\int \frac{5x^2-6x+2}{(x^2+1)(x-2)}\,dx = \int \frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= 2\log|x-2| + \frac{3}{2}\log(x^2+1) + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

b) $$\int_1^2 x^3 e^{x^2}\,dx = \left[\frac{x^2 e^{x^2}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 x e^{x^2}\,dx =$$

$f(x) = x e^{x^2}$ $\quad F(x) = \frac{e^{x^2}}{2}$

$g(x) = x^2$ $\quad g'(x) = 2x$

$$= 2e^4 - \frac{e}{2} - \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_1^2 =$$

$$= 2e^4 - \cancel{\frac{e}{2}} - \frac{e^4}{2} + \cancel{\frac{e}{2}} = 2e^4 - \frac{e^4}{2} = \frac{3}{2}e^4$$

Exercício 8

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1}+3}{\sqrt[5]{(x+1)^2}+x}\,dx = \int_1^{\sqrt[15]{2}} \frac{t^5+3}{t^6+t^{15}-1}\cdot 15t^{14}\,dt$$

$x+1 = t^{15} \Leftrightarrow x = t^{15}-1$

Se $x=0 \Rightarrow t=1$

Se $x=1 \Rightarrow t=\sqrt[15]{2}$

Exercício 9

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 - 5x = x^3 + 5x^2 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -2$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^{0} 2x^3 + 4x^2 - 5x - x^3 - 5x^2 - x \, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{0}^{3} 2x^3 + 4x^2 - 5x - x^3 - 5x^2 - x \, dx \right|$$

Exercício 10

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4 - 1} \, dx$$

$$x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \notin [2, +\infty[$$

O integral impróprio é de primeira espécie pois o domínio de integração é ilimitado mas a função integranda é limitada em qualquer subintervalo limitado do domínio de integração.

$$\left|\frac{x \operatorname{sen} x}{x^4-1}\right| \leq \frac{x}{x^4-1}, \quad \forall x \in [2,+\infty[$$

$$0 < \frac{x}{x^4-1}, \quad \forall x \in [2,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^4-1}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^4}} = 1 \text{ finito e}$$

não nulo. Assim $\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^4-1}\,dx$ e $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ têm a mesma natureza, pelo que $\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^4-1}\,dx$ é convergente.

Daqui se conclui que $\int_2^{+\infty} \left|\frac{x \operatorname{sen} x}{x^4-1}\right| dx$ é convergente, pelo que $\int_2^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4-1}\,dx$ é absolutamente convergente.

Exercício 11

a) $\operatorname{arctg}(t^2)$ tem domínio $\mathbb{R}$

$1+\frac{1}{x}$ tem domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Assim, $D_F = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) $\operatorname{arctg}(t^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a composta de duas funções contínuas (arctg e um polinómio)

Pelo Teorema fundamental do cálculo integral

$$G(x) = \int_1^x \operatorname{arctg}(t^2)\,dt \text{ é diferenciável em } \mathbb{R} \text{ e}$$

$G'(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$.

$F(x) = G(1 + \frac{1}{x})$ logo, pela derivada da função composta,

$F'(x) = G'(1+\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \operatorname{arctg}\left[(1+\frac{1}{x})^2\right](-\frac{1}{x^2}), \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

e)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{\frac{1}{x^2}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

F e $\frac{1}{x^2}$ são diferenciáveis em $]0, +\infty[$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} \neq 0, \forall x \in]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F'(x)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left((1+\frac{1}{x})^2\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}\left((1+\frac{1}{x})^2\right)\frac{x}{2} = +\infty$$

Pela Regra de Cauchy,

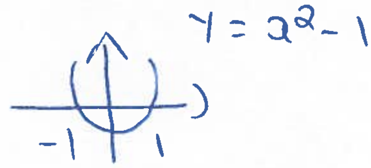
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

Exercício 12

$$f''(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{x^2+1} \cancel{2}x + (-1)(1+x^2)^{-2} 2x =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^2+1) - 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$



		-1		0		1	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

f tem a concavidade voltada para baixo em

$]-\infty, -1[\cup]0, 1[$

f tem a concavidade voltada para cima em

$]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

f tem pontos de inflexão em $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$

Exercício 13

a) $f \in C^2(\mathbb{R})$

$$f'(x) = (8x - 9x^2) e^{x-1} + (4x^2 - 3x^3) e^{x-1} =$$
$$= (-3x^3 - 5x^2 + 8x) e^{x-1}$$

$$f''(x) = (-9x^2 - 10x + 8) e^{x-1} + (-3x^3 - 5x^2 + 8x) e^{x-1}$$
$$= (-3x^3 - 14x^2 - 2x + 8) e^{x-1}$$

(12)

$f(0) = 0$

$f'(0) = 0$

$(4x^2 - 3x^3)e^{x-1} = \frac{x^2}{2}(-3c^3 - 14c^2 - 2c + 8)e^{c-1}$, com c entre 0 e x

b) Escrevendo a Fórmula de MacLaurin para g, com resto de Lagrange de ordem 2 temos:

$$g(x) = g(0) + x g'(0) + \frac{x^2}{2} g''(c_2), \text{ com } c_2 \text{ entre } 0 \text{ e } x$$
$$= \frac{x^2}{2} g''(c_2)$$

Escrevendo a Fórmula de Taylor para g, em torno do ponto 1, com resto de Lagrange de ordem 2 temos:

$$g(x) = g(1) + (x-1)g'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} g''(c_1), \text{ com } c_1 \text{ entre } 1 \text{ e } x$$
$$= 1 + \frac{(x-1)^2}{2} g''(c_1)$$

Assim

$$g(1) = \frac{1}{2} g''(c_2) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} g''(c_2) \Leftrightarrow g''(c_2) = 2$$

$$g(0) = 1 + \frac{1}{2} g''(c_1) \Leftrightarrow 0 = 1 + \frac{1}{2} g''(c_1) \Leftrightarrow -2 = g''(c_1)$$

com c_1, c_2 entre 0 e 1.