FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I

1º Teste — 20 de Abril de 2016
(Duração 1:30)

1. Considere os conjuntos definidos por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1 - |x^2 - 2|}{(x-1)^2} \geq 0 \right\},$$

$B = [1,2] \cup]3,4]$ e $C = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(a) **[1.0 val.]** Escreva o conjunto A na forma de um intervalo ou de uma união de intervalos de números reais.

(b) **[1.0 val.]** Determine o interior e a fronteira de C.

(c) **[1.0 val.]** Determine o derivado e a aderência de $B \cup C$. Diga, justificando, se $B \cup C$ é um conjunto fechado.

2. Calcule, justificando, o valor dos seguintes limites:

(a) **[1.5 val.]** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{5^n + 1}}{n}$

(b) **[2.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=5}^{n} \frac{n^5}{2n^6 + k^2}$

3. Considere a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + \frac{n+2}{4n}, \quad n \geq 2 \end{cases}.$$

(a) **[2.0 val.]** Mostre, usando o princípio de indução matemática, que $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) **[1.0 val.]** Justifique que esta sucessão é monótona crescente.

(c) **[1.5 val.]** A sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente? Justifique.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Seja k uma constante real e considere a função f, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \arccos\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + k & \text{, se } x > 0 \\ \\ \frac{\operatorname{sen}(x^2+3x)}{x} & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

(a) **[1.0 val.]** Determine o domínio de f.

(b) **[2.0 val.]** Calcule o valor de k por forma a que f seja prolongável por continuidade a $x = 0$. Defina a correspondente função prolongamento.

5. Considere a função g, real de variável real, definida em $\mathbb{R}_0^+$ por

$$g(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + \log(x+1).$$

(a) **[1.5 val.]** Mostre que a equação $g(x) = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, e]$.

(b) **[1.0 val.]** Determine a expressão que define a derivada de g, indicando o respectivo domínio de validade.

(c) **[1.5 val.]** Justifique a unicidade da solução da equação $g(x) = 1$.

6. Seja h uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, cuja derivada tem exactamente um zero.

(a) **[0.5 val.]** Justifique que h tem no máximo dois zeros.

(b) **[1.5 val.]** Sabendo que h é uma função ímpar, indique, justificando, o seu número exacto de zeros.