FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I

2º Teste — 4 de Junho de 2016
(Duração 1:30)

1. Calcule:

   (a) **[2.5 val.]** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+2x+1}dx$

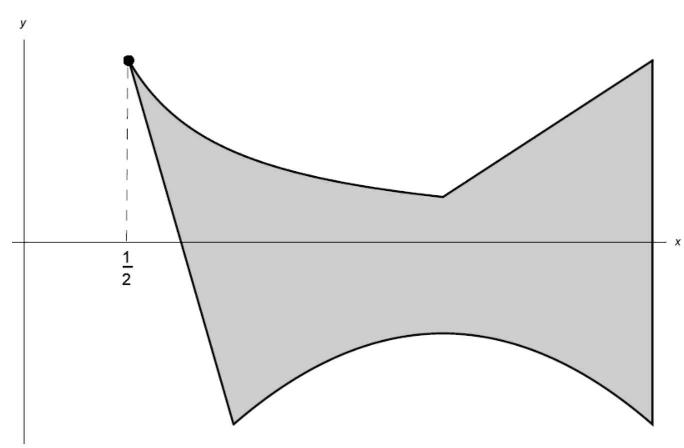
   (b) **[1.5 val.]** $\displaystyle\int (x^2+x)\log(x)dx$

   (c) **[2.5 val.]** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+4}dx$

2. **[2.5 val.]** Considere o domínio plano limitado, representado a sombreado na seguinte figura, definido pelos gráficos das funções

$$f(x) = -8x+6,\ g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2},\ i(x) = \frac{1}{x},\ j(x) = -x^2+4x-5$$

e pela recta $x = 3$. Represente a área deste domínio sob a forma de um integral ou de uma soma de integrais (não efectue o respectivo cálculo).



$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

3. **[2.0 val.]** Recorrendo à definição de integral impróprio, analise a convergência do integral:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+x^2)(2-\operatorname{arctg}(x))^2}dx$$

4. **[2.5 val.]** Determine, justificando, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{e^x}}$$

5. (a) **[1.5 val.]** Escreva a Fórmula de Taylor centrada no ponto $x = 1$, com resto de Lagrange de ordem 2, para a função h definida por:

$$h(x) = e^{x^3-x}$$

   (b) **[1.5 val.]** Considere agora uma função $g \in C^2(\mathbb{R})$, estritamente crescente em todo o seu domínio. Seja f a função definida por $f(x) = g(x^3 - x)$. Recorrendo ao Teorema de Taylor, determine e classifique os extremos relativos de f.

6. Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{arctg}^2(x)} e^{-t^2}dt.$$

   (a) **[2.0 val.]** Determine, justificando, a expressão que define a função derivada de F.

   (b) **[1.5 val.]** Recorrendo ao Teorema de Lagrange, mostre que:

$$F(x) < \pi x,\ \forall x > 0$$

<table>
<tr><th>Expressão</th><th>Substituição</th></tr>
<tr><td>$\sqrt{a^2-x^2}$</td><td>$x = a\cos(t)$ ou $x = a\sin(t)$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x^2-a^2}$</td><td>$x = a\,\mathsf{sec}(t)$ ou $x = a\,\mathsf{cosec}(t)$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x^2+a^2}$</td><td>$x = a\,\mathsf{tg}(t)$ ou $x = a\,\mathsf{cotg}(t)$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})$</td><td>$x = t^\mu$
$\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$</td><td>$\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^\mu$
$\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$f(x) = R(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c})$</td><td>$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = \sqrt{a}\,x + t$
se $a > 0$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = t\,x + \sqrt{c}$
se $c > 0$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = t\,(x-\alpha)$
ou $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = t\,(x-\beta)$
se α e β são zeros reais</td></tr>
<tr><td>$f(x) = R(e^x)$</td><td>$e^x = t$</td></tr>
</table>