Análise Matemática I

2º teste - 4/6/2016

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

Exercício 1

a)

$$\begin{array}{l|l} x^2+x & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -x^2-2x-1 & 1 \\ \hline -2x & \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+2x+1}\,dx = \int 1 - \frac{2x}{x^2+2x+1}\,dx =$$

$$= x - \int \frac{2x}{x^2+2x+1}\,dx$$

$$\frac{2x}{x^2+2x+1} = \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2}$$

Assim

$$2x = A + B(x+1) = Bx + A + B$$

Logo
$$\begin{cases} B = 2 \\ A+B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 2 \\ A = -2 \end{cases}$$

Pelo que

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+2x+1}\,dx = x - \int \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}\,dx =$$

$$= x - 2(x+1)^{-1} - 2\log|x+1| + c, \text{ com } c \in \mathbb{R}$$

b)

$$\int (x^2+x)\log x \, dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\log x - \int \frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}\, dx =$$

$f(x)=x^2+x \quad F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\log x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + c,$$

$g(x)=\log x \quad g'(x)=\frac{1}{x}$

com $c \in \mathbb{R}$

c)

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+4}\, dx = \int_1^e \frac{t^2+t}{t^2+4}\cdot\frac{1}{t}\, dt = \int_1^e \frac{t+1}{t^2+4}\, dt =$$

$e^x = t \Leftrightarrow x = \log t$

$$= \int_1^e \frac{t}{t^2+4} + \frac{1}{t^2+4}\, dt =$$

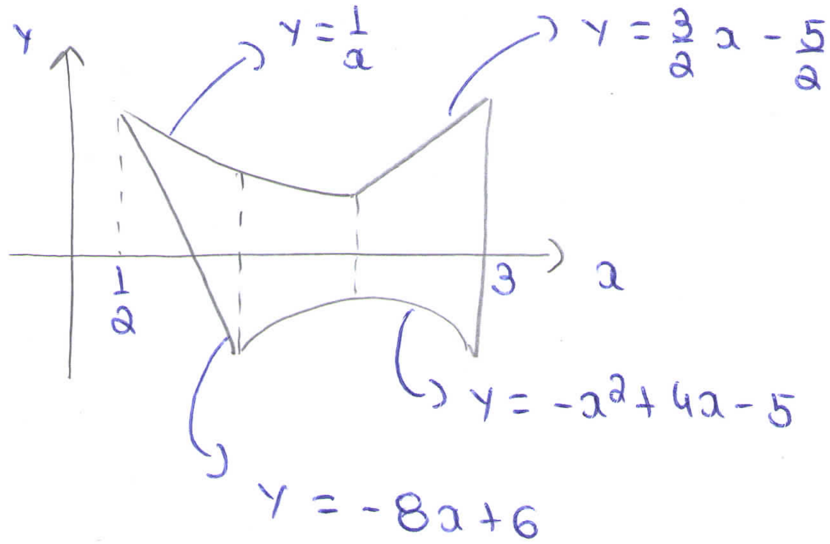
$$= \int_1^e \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+4} + \frac{1}{2}\frac{1/2}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\log(t^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}\log(e^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\log 5 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercício 2



$$-x^2 + 4x - 5 = -8x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 44}}{-2} = \frac{-12 \pm 10}{-2} = \begin{cases} 11 \\ 1 \end{cases}$$

11 > 3 logo não é a solução pretendida

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$-\frac{1}{3} < 0$ logo não é a solução pretendida

$$\text{Área} = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x} - (-8x + 6)\, dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{x} - (-x^2 + 4x - 5)\, dx +$$

$$+ \int_{2}^{3} \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} - (-x^2 + 4x - 5)\, dx$$

Exercício 3

$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+x^2)(2-\operatorname{arctg} x)^2} dx$ é um integral impróprio de primeira espécie pois o domínio de integração é um conjunto ilimitado mas a função integranda é limitada em qualquer subintervalo limitado do domínio de integração.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+x^2)(2-\operatorname{arctg} x)^2} dx = \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{0} \frac{1}{(1+t^2)} (2-\operatorname{arctg} t)^{-2} dt =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[(2-\operatorname{arctg} t)^{-1} \right]_{x}^{0} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2-\operatorname{arctg} x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4+\pi}$$

Exercício 4

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{e^x}} \quad (0^0)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{\log\left[\left(\frac{x+1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{e^x}} \right]} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x^2+1} \right)}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)}{e^x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$\log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$ e e^x são diferenciáveis em $]0,+\infty[$, no primeiro caso porque é a composta de duas funções diferenciáveis (um logaritmo e o quociente de duas funções diferenciáveis, no caso dois polinómios)

$(e^x)' = e^x \neq 0, \forall x \in]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\right]'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\log(x+1)-\log(x^2+1)\right]'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+\frac{1}{x}}}{e^x} = 0$$

Pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)}{e^x} = 0.$$

Assim

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{e^x}} = e^0 = 1$$

Exercício 5

a)

$f \in C^2(\mathbb{R})$ $\qquad f(1) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^{x^3-x}(3x^2-1)$ $\qquad f'(1) = 2$

$f''(x) = e^{x^3-x}(3x^2-1)^2 + e^{x^3-x}\,6x$

Como

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(c), \text{ com } c \text{ entre } 1 \text{ e } x,$$

temos

$$e^{x^3-x} = 1 + 2(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} e^{c^3-c}\left(6c + (3c^2-1)^2\right),$$

com c entre 1 e x

b) Se $g \in C^2(\mathbb{R})$ e é estritamente crescente então

$$g'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Considerando $f(x) = g(x^3-x)$ temos $f'(x) = g'(x^3-x)(3x^2-1)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{g'(x^3-x)}_{>0}(3x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f''(x) = g''(x^3-x)(3x^2-1)^2 + g'(x^3-x)\,6x$

Para $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ temos

$$f''(x) = \underbrace{g'(x^3 - x)}_{>0} 6x$$

Logo $f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$ e $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$, pelo que f tem um mínimo relativo em $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e um máximo relativo em $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercício 6

a) Seja $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Como e^{-t^2} é contínua em $\mathbb{R}$, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que G é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = e^{-x^2}$.

Atendendo a que $F(x) = G(\operatorname{arctg}^2 x)$ e à derivada da função composta temos

$$F'(x) = G'(\operatorname{arctg}^2 x)\,(\operatorname{arctg}^2 x)' =$$

$$= e^{-\operatorname{arctg}^4 x}\; 2 \operatorname{arctg} x \,\frac{1}{1+x^2}$$

b)

F é diferenciável (logo também é contínua) em $\mathbb{R}$.

Seja $a>0$ e consideremos o intervalo $[0,a]$. F é contínua em $[0,a]$ e diferenciável em $]0,a[$.

Pelo Teorema de Lagrange,

$$\exists c \in]0,a[: F'(c) = \frac{F(a)-F(0)}{a-0} = \frac{F(a)}{a} \text{ pois}$$

$$F(0) = \int_0^{\operatorname{arctg}^2 0} e^{-t^2}\,dt = 0.$$

Assim,

$$F(a) = a\,F'(c) = a \underbrace{e^{-\operatorname{arctg}^4 c}}_{\leq 1} \, 2\operatorname{arctg} c \underbrace{\frac{1}{1+c^2}}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq x \, 2\operatorname{arctg} c < a\, 2\, \frac{\pi}{2} = \pi a$$

pois $\operatorname{arctg} c \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$