

Análise Matemática I

Exame de Época de Recurso — 10 de Janeiro de 2017

1. [1.5 val.] Seja A o conjunto dos termos da sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$u_n = \begin{cases} -1 + \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 - \frac{2}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Determine o interior, a fronteira, a aderência e o derivado de $B = (]0, 2[\setminus \{1\}) \cup A$.

2. [1.5 val.] Calcule o limite da sucessão $a_n = \sum_{k=4}^{2n+3} \frac{3 \operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2 + 2k}}$.
3. [1.0 val.] Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(1) = 0$. Prove que existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{|1-x|}, & \text{se } x \geq 0 \\ x - \sin(x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- (a) [0.5 val.] Determine o domínio de f .
- (b) [1.0 val.] Caracterize a função derivada de f .
- (c) [1.0 val.] Estude a monotonia e extremos de f .
- (d) [1.0 val.] Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}_0^-$.
5. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^x + \log(x+1).$$

- (a) [1.5 val.] Usando o método de indução matemática prove a seguinte igualdade

$$f^{(n)}(x) = e^x - \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x+1)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (b) [1.0 val.] Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n de f , com resto de Lagrange.



Análise Matemática I

Exame de Época de Recurso — 10 de Janeiro de 2017

6. Calcule o valor dos seguintes integrais:

a) [1,0 val.] $\int_{-3}^0 \frac{3x^2 - 7x + 15}{(x-2)(x^2+9)} dx;$

b) [1,0 val.] $\int_1^4 \sqrt{x} \log(x) dx.$

7. [1,5 val.] Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2 + \sin(x) \cos(x)}{\sin^2(x)(2 - \sin^2(x))} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2 + t + 2}{t^2(t^2 + 2)} dt.$$

8. [1,5 val.] Determine a área do domínio plano limitado, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pelos gráficos das funções

$$f(x) = \sin(2x) \text{ e } g(x) = \cos(x)$$

9. Considere a função F , real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_{-2}^{2x-4} \frac{e^t}{\log(t^2)} dt.$$

- (a) [1,0 val.] Determine o domínio de F . Justifique a sua resposta.

- (b) [1,0 val.] Calcule a derivada de F . Justifique a sua resposta.

- (c) [1,0 val.] Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x^2 - 1}.$

10. Considere o seguinte integral impróprio, onde $a \in \mathbb{R}_0^-$,

$$\int_{-\infty}^a \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx.$$

- (a) [1,0 val.] Classifique o integral impróprio em função do parâmetro a .

- (b) [1,0 val.] Calcule o valor do integral para $a = 0$.

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$
$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t, \text{ se } a > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}, \text{ se } c > 0$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$ $R(-\text{sen}(x), -\cos(x)) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(x) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$