

Enunciado A

Análise Matemática I

Repetição do 3º Teste — 10 de Janeiro de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} (\arcsen(x))^3}$. Então $\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} f(x) dx$ é igual a:

- (a) $\frac{10}{\pi^2}$. (b) $\frac{7}{2\pi^2}$. (c) $\frac{7}{\pi^2}$. (d) $-\frac{10}{\pi^2}$.

2. Seja $f(x)$ a solução do problema

$$f'(x) = x \cos(x^2), \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1.$$

O valor de $f(x)$ no ponto $x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ é

- (a) -2 . (b) 1 . (c) -4 . (d) -1 .

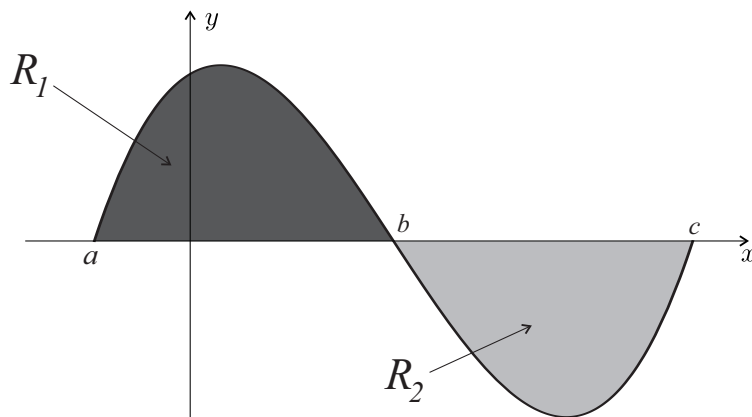
3. Considere a seguinte decomposição em fracções simples

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{Dx+E}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}},$$

onde A, B, C, D e E são constantes reais. Seja g uma função polinomial de grau menor ou igual a 4. A função racional a que pode corresponder a decomposição anterior é:

- (a) $\frac{g(x)}{(x^2+3x)(x^2-x+1)}$. (c) $\frac{g(x)}{(x^3-6x^2+9x)(x^2+x+1)}$.
(b) $\frac{g(x)}{(x^3+6x^2+9x)(x^2+x+1)}$. (d) $\frac{g(x)}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-x+1)}$.

4. O eixo das abscissas e o gráfico da função $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ dividem o plano em duas regiões, R_1 e R_2 , indicadas na figura.



Seja A_1 a área da região R_1 e A_2 a área da região R_2 . Então

$$2 \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

é igual a:

- (a) $2A_1 + A_2$. (b) $2A_1 + 3A_2$. (c) $2A_1 - A_2$. (d) $2A_1 + 2A_2$.

5. Seja $f(x) = \int_{k \log(x)}^{3x} e^{-t} dt$, com $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, tal que $f'(1) = \frac{6}{e^3}$. Considere as afirmações seguintes:

I. $f'(x) = \frac{3}{e^{3x}} - kx^{-1-k}$;

III. $f'(x) = -\frac{3}{e^{3x}} + kx^{-1-k}$;

II. O valor de k é 0;

IV. O valor de k é $-\frac{3}{e^3}$.

A lista completa das afirmações correctas é:

(a) III e IV.

(c) IV.

(b) I e IV.

(d) II e IV.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. [2,0 val.] Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_1^4 \sqrt{x} \log(x) dx.$$

2. Considere o integral

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2 + \sin(x) \cos(x)}{\sin^2(x)(2 - \sin^2(x))} dx.$$

(a) [2,0 val.] Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2 + \sin(x) \cos(x)}{\sin^2(x)(2 - \sin^2(x))} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2 + t + 2}{t^2(t^2 + 2)} dt.$$

(b) [2,5 val.] Calcule o valor do integral.

3. [2,5 val.] Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x) = \sin(2x) \text{ e } g(x) = \cos(x)$$

no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Considere a função F , real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_{-2}^{2x-4} \frac{e^t}{\log(t^2)} dt.$$

(a) [2,0 val.] Determine o domínio de F . Justifique a sua resposta.

(b) [1,5 val.] Calcule a derivada de F . Justifique a sua resposta.

5. [2,5 val.] Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx.$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$
$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t, \text{ se } a > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}, \text{ se } c > 0$
$f(x) = R(\sin(x), \cos(x))$	$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$
$f(x) = R(\sin(x), \cos(x))$ $R(-\sin(x), -\cos(x)) = R(\sin(x), \cos(x))$	$\text{tg}(x) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$