

Enunciado A

Análise Matemática I

1º Teste — 26 de Outubro de 2016

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ e } B =] - 3, 2[\setminus \{0\}.$$

Seja $C = A \cup B$.

1. Qual o interior e a fronteira de C ?

- (a) $\text{int}(C) =] - 3, 2[$ e $\text{fr}(C) = \{-3, 2\} \cup A$.
- (b) $\text{int}(C) =] - 3, 2[$ e $\text{fr}(C) = \{-3, 2\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (c) $\text{int}(C) =] - 3, 2[\setminus \{0\}$ e $\text{fr}(C) = \{-3, 0, 2\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (d) $\text{int}(C) =] - 3, 2[\setminus \{0\}$ e $\text{fr}(C) = \{-3, 0, 2\} \cup A$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) $\sup(C) = \frac{5}{2}$ e $\min(C) = -3$.
- (b) $\max(C) = \frac{5}{2}$ e $\max(B) = 2$.
- (c) $\min(C) = -3$ e $\min(A) = 1$.
- (d) $\sup(C) = \frac{5}{2}$ e $\inf(C) = -3$.

3. O conjunto S dos pontos isolados e o derivado de C são

- (a) $S = A$ e $C' = [-3, 2]$.
- (b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ e $C' = [-3, 2]$.
- (c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ e $C' = [-3, 2] \setminus \{0\}$.
- (d) $S = A$ e $C' = [-3, 2] \setminus A$.

4. Seja D o domínio da função real de variável real, f , definida por

$$f(x) = \frac{\arcsen\left(\frac{1}{|x+1|}\right) \sqrt{4-x^2}}{\arctg(2x) + \frac{\pi}{4}}.$$

Qual a fronteira de D ?

- (a) $\{-2, 0, 2\}$. (c) $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 2\}$.
(b) $\{-2, -1, 0, 2\}$. (d) $\{-2, -\frac{1}{2}, 2\}$.

5. Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto fechado e (x_n) uma sucessão convergente de elementos de D . Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) A sucessão (x_n) não tem subsucessões convergentes. (c) A sucessão (x_n) não é limitada, mas tem subsucessões limitadas.
(b) A sucessão (x_n) é monótona e limitada. (d) O limite de (x_n) pertence a D .

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. Calcule, se existir, o valor dos seguintes limites:

- (a) [2.5 val.] $\lim \left(\frac{4^n + 3}{4^n + 1} \right)^{4^{n-1}}$;
(b) [2.5 val.] $\lim \sum_{k=3}^{2n+2} \frac{\sqrt{n+3}}{k + \sqrt{5n^3 + 2}}$.

2. Considere a sucessão definida por

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n - n^2 + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) [3.0 val.] Utilizando o Princípio de Indução Matemática prove que

$$u_n = n! + n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) [2.0 val.] Recorrendo à alínea anterior calcule $\lim \sqrt[n]{u_n}$.

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 - 4x + 4}\right), & \text{se } x < 2 \\ \log(x^2 - x - 2) - \log(x^2 - 2x), & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

- (a) [1.5 val.] Determine o domínio de f .
(b) [2.0 val.] Estude a continuidade de f no seu domínio.
(c) [1.5 val.] Averigúe se é possível prolongar f por continuidade a $x = 2$. Justifique.