

Grelha de Correção do Enunciado A
Análise Matemática I

1º Teste – 26 de Outubro de 2016

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{e} \quad B =] - 3, 2[\setminus \{0\}.$$

Seja $C = A \cup B$.

1. Qual o interior e a fronteira de C ?

(a) $\text{int}(C) =] - 3, 2[$ e $\text{fr}(C) = \{-3, 2\} \cup A$.

(b) $\text{int}(C) =] - 3, 2[$ e $\text{fr}(C) = \{-3, 2\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

☒ (c) $\text{int}(C) =] - 3, 2[\setminus \{0\}$ e $\text{fr}(C) = \{-3, 0, 2\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

(d) $\text{int}(C) =] - 3, 2[\setminus \{0\}$ e $\text{fr}(C) = \{-3, 0, 2\} \cup A$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) $\sup(C) = \frac{5}{2}$ e $\min(C) = -3$.

(c) $\min(C) = -3$ e $\min(A) = 1$.

(b) $\max(C) = \frac{5}{2}$ e $\max(B) = 2$.

☒ (d) $\sup(C) = \frac{5}{2}$ e $\inf(C) = -3$.

3. O conjunto S dos pontos isolados e o derivado de C são

(a) $S = A$ e $C' = [-3, 2]$.

☒ (b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ e $C' = [-3, 2]$.

(c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ e $C' = [-3, 2] \setminus \{0\}$.

(d) $S = A$ e $C' = [-3, 2] \setminus A$.

4. Seja D o domínio da função real de variável real, f , definida por

$$f(x) = \frac{\arcsen\left(\frac{1}{|x+1|}\right) \sqrt{4-x^2}}{\operatorname{arctg}(2x) + \frac{\pi}{4}}.$$

Qual a fronteira de D ?

- (a) $\{-2, 0, 2\}$. (c) $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 2\}$.
 (b) $\{-2, -1, 0, 2\}$. (d) $\{-2, -\frac{1}{2}, 2\}$.

5. Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto fechado e (x_n) uma sucessão convergente de elementos de D . Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) A sucessão (x_n) não tem subsucessões convergentes. (c) A sucessão (x_n) não é limitada, mas tem subsucessões limitadas.
 (b) A sucessão (x_n) é monótona e limitada. (d) O limite de (x_n) pertence a D .

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. Calcule, se existir, o valor dos seguintes limites:

- (a) [2.5 val.] $\lim \left(\frac{4^n + 3}{4^n + 1} \right)^{4^{n-1}}$;
 (b) [2.5 val.] $\lim \sum_{k=3}^{2n+2} \frac{\sqrt{n+3}}{k + \sqrt{5n^3 + 2}}$.

Resposta: (a) Designando por a_n o termo geral da sucessão podemos escrever

$$a_n = \left(\frac{4^n + 3}{4^n + 1} \right)^{4^{n-1}} = \left[\frac{4^n \left(1 + \frac{3}{4^n} \right)}{4^n \left(1 + \frac{1}{4^n} \right)} \right]^{4^{n-1}} = \left[\frac{\left(1 + \frac{3}{4^n} \right)^{4^n}}{\left(1 + \frac{1}{4^n} \right)^{4^n}} \right]^{1/4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim 4^n = +\infty$, sabemos que

$$\lim \left(1 + \frac{3}{4^n} \right)^{4^n} = e^3$$

e

$$\lim \left(1 + \frac{1}{4^n} \right)^{4^n} = e,$$

portanto,

$$\lim a_n = \left(\frac{e^3}{e} \right)^{1/4} = \sqrt[4]{e^2} = \sqrt{e}.$$

(b) O termo geral a_n da sucessão está definido como a soma de $k = 3$ a $k = 2n + 2$ de $\frac{\sqrt{n+3}}{k + \sqrt{5n^3+2}}$. A maior parcela é $\frac{\sqrt{n+3}}{3 + \sqrt{5n^3+2}}$ (que corresponde a $k = 3$) e a menor é $\frac{\sqrt{n+3}}{2n+2 + \sqrt{5n^3+2}}$ (correspondente a $k = 2n + 2$), como está demonstrado a seguir. De maneira evidente temos

$$k + \sqrt{5n^3+2} \geq 3 + \sqrt{5n^3+2} > \sqrt{5n^3+2}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, k \geq 3$$

e

$$k + \sqrt{5n^3+2} \leq 2n+2 + \sqrt{5n^3+2}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, k \geq 3 \text{ tais que } k \leq 2n+2.$$

Logo para todo o n e $3 \leq k \leq 2n+2$, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{5n^3+2} &< k + \sqrt{5n^3+2} \leq 2n+2 + \sqrt{5n^3+2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5n^3+2}} &> \frac{1}{k + \sqrt{5n^3+2}} \geq \frac{1}{2n+2 + \sqrt{5n^3+2}} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{5n^3+2}} &> \frac{\sqrt{n+3}}{k + \sqrt{5n^3+2}} \geq \frac{\sqrt{n+3}}{2n+2 + \sqrt{5n^3+2}}. \end{aligned}$$

Como (a_n) está definida como uma soma de $2n+2 - 3 + 1 = 2n$ parcelas obtemos,

$$\begin{aligned} 2n \cdot \frac{\sqrt{n+3}}{2n+2 + \sqrt{5n^3+2}} &\leq \sum_{k=3}^{2n+2} \frac{\sqrt{n+3}}{k + \sqrt{5n^3+2}} < 2n \cdot \frac{\sqrt{n+3}}{3 + \sqrt{5n^3+2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \frac{2n\sqrt{n+3}}{2n+2 + \sqrt{5n^3+2}} &\leq \sum_{k=3}^{2n+2} \frac{\sqrt{n+3}}{k + \sqrt{5n^3+2}} \leq \frac{2n\sqrt{n+3}}{\sqrt{5n^3+2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Seja $b_n = \frac{2n\sqrt{n+3}}{2n+2 + \sqrt{5n^3+2}} = \frac{\sqrt{4n^3+12n^2}}{2n+2 + \sqrt{5n^3+2}}$. Dividindo o numerador e o denominador da fracção que define a sucessão por $n^{3/2}$ temos:

$$\lim b_n = \lim \frac{\frac{\sqrt{4n^3+12n^2}}{n^{3/2}}}{\frac{2n+2 + \sqrt{5n^3+2}}{n^{3/2}}} = \lim \frac{\frac{\sqrt{4n^3+12n^2}}{n^3}}{\frac{2n}{n^{3/2}} + \frac{2}{n^{3/2}} + \sqrt{\frac{5n^3+2}{n^3}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Seja $c_n = \frac{2n\sqrt{n+3}}{\sqrt{5n^3+2}} = \sqrt{\frac{4n^3+12n^2}{5n^3+2}}$. É evidente que $\lim c_n = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Finalmente, como os dois limites são iguais, o Teorema das Sucessões Enquadradas permite-nos concluir que

$$\lim a_n = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

2. Considere a sucessão definida por

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n - n^2 + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) [3.0 val.] Utilizando o Princípio de Indução Matemática prove que

$$u_n = n! + n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) [2.0 val.] Recorrendo à alínea anterior calcule $\lim \sqrt[n]{u_n}$.

Resposta: (a) Seja $p(n)$ a proposição $u_n = n! + n$. Se $n = 1$ obtemos $2 = 1! + 1$ que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de Indução: $u_n = n! + n$.

Tese de Indução: $u_{n+1} = (n+1)! + n + 1$.

Demonstração: Pela definição da sucessão temos

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - n^2 + 1.$$

Aplicando a hipótese de indução obtemos

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)u_n - n^2 + 1 = (n+1)(n! + n) - n^2 + 1 \\ &= (n+1)n! + n(n+1) - n^2 + 1 = (n+1)! + n^2 + n - n^2 + 1 \\ &= (n+1)! + n + 1. \end{aligned}$$

Como a proposição é verdadeira para $n = 1$ e é hereditária concluímos, pelo Princípio de Indução, que

$$u_n = n! + n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Como $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

$$\begin{aligned} \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim \frac{(n+1)! + n + 1}{n! + n} = \lim \frac{1 + \frac{n+1}{(n+1)!}}{\frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n}{(n+1)!}} \\ &= \lim \frac{1 + \frac{1}{n!}}{\frac{1}{n+1} + \frac{n}{(n+1)!}} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n!}}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n-1)!}} = +\infty \end{aligned}$$

podemos concluir que $\lim \sqrt[n]{u_n} = +\infty$.

Alternativa: Como $u_n = n! + n \geq n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$, podemos concluir que $\lim \sqrt[n]{u_n} = +\infty$. Para provar que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$ usa-se o mesmo teorema da resolução anterior:

$$\lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = +\infty \Rightarrow \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2-4x+4}\right), & \text{se } x < 2 \\ \log(x^2-x-2) - \log(x^2-2x), & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

(a) [1.5 val.] Determine o domínio de f .

(b) [2.0 val.] Estude a continuidade de f no seu domínio.

(c) [1.5 val.] Averigüe se é possível prolongar f por continuidade a $x = 2$. Justifique.

Resposta: (a)

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 \neq 0 \wedge x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 > 0 \wedge x^2 - 2x > 0 \wedge x > 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+1) > 0 \wedge x(x-2) > 0 \wedge x > 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : (x > 2 \vee x < -1) \wedge (x < 0 \vee x > 2) \wedge x > 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}. \end{aligned}$$

(b) Seja $x < 2$. Sejam $f_1(x) = (x-2)^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$ e $f_3(x) = \sin(x)$. Em $] -\infty, 2[$ temos $f(x) = f_1(x) \times (f_3 \circ f_2)(x)$. A função f_2 é uma função racional cujo denominador não se anula se $x < 2$, sendo, portanto, contínua nesse conjunto. A função f_3 é contínua em $\mathbb{R}$ o que implica que $f_3 \circ f_2$ é contínua se $x < 2$. Como f_1 é contínua em $\mathbb{R}$ por ser uma função polinomial e o produto de funções contínuas é ainda uma função contínua, podemos concluir que f é contínua se $x < 2$.

Seja $x > 2$. Sejam $g_1(x) = x^2 - x - 2$, $g_2(x) = x^2 - 2x$ e $g_3(x) = \log(x)$. Em $]2, +\infty[$ temos $f(x) = (g_3 \circ g_1)(x) - (g_3 \circ g_2)(x)$. Neste conjunto g_1 é positiva e é contínua por ser uma função polinomial. Como a função logarítmica é contínua em $\mathbb{R}^+$ e a composição de funções contínuas é contínua, podemos afirmar que $g_3 \circ g_1$ é contínua se $x > 2$. De modo análogo, g_2 é positiva e é contínua por ser uma função polinomial. Como a função logarítmica é contínua em $\mathbb{R}^+$ e a composição de funções contínuas é contínua, podemos afirmar que $g_3 \circ g_2$ é contínua se $x > 2$. Concluimos que f é contínua por ser a diferença de funções contínuas.

(c) Uma função f é prolongável por continuidade a um ponto a se, e só se, existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
Vejam se existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\log(x^2 - x - 2) - \log(x^2 - 2x) \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \log \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \log \left(\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \log \left(\frac{x+1}{x} \right) = \log \left(\frac{3}{2} \right); \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)^2 \sin \left(\frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right) = 0 \end{aligned}$$

porque a função seno é limitada na vizinhança de 2.

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, portanto, f não pode ser prolongável por continuidade a $x = 2$.