FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado A

Análise Matemática I

2º Teste — 26 de Novembro de 2016

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e cuja derivada é definida por
$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \leq 0 \\ x^3+1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$
O contradomínio de f é:

   (a) $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
   (b) $\mathbb{R}$.
   (c) $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.
   (d) $[-1, +\infty[$.

2. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $H(n) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Qual das seguintes afirmações é correcta para a equação $H(x) = \frac{1}{2}$?

   (a) Não tem soluções.
   (b) Tem infinitas soluções.
   (c) Tem duas soluções.
   (d) Tem mais de duas soluções, mas em número finito.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f\left(x\, e^x\right)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (a) $g(-1)$ é mínimo local de g.
   (b) g é crescente em $\mathbb{R}$.
   (c) $g(-1)$ é máximo local de g.
   (d) $x = 0$ é ponto de estacionaridade de g.

4. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e, para cada $x > 0$,

$$\exists c \in \,]0, x[\, : f(x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\left(\frac{4}{(c+1)^3} + \frac{1}{(c+1)^2}\right).$$

Qual o valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}}{x^3}$?

(a) $\frac{1}{2}$.

(b) $-\frac{1}{6}\left(\frac{4}{(c+1)^3} + \frac{1}{(c+1)^2}\right) + \frac{1}{3}$.

(c) $-\frac{1}{2}$.

(d) 1.

5. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $]0, 1[$. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(a) $\exists c \in \,]0, 1[\, : f(c) = \frac{1}{2}$.

(b) $\exists c \in \,]0, 1[\, : f'(c) = 0$.

(c) $\exists c \in \,]0, 1[\, : f(c) = f(1) - f(0)$.

(d) $\exists c \in \,]0, 1[\, : f'(c) = f(1) - f(0)$.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[3.0 val.]** Determine constantes reais a, b e c tais que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \log(x+1) - (ax^2 + bx + c)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(x^2 + 1)$.

   (a) **[1.5 val.]** Escreva a Fórmula de Taylor de f com resto de Lagrange de ordem 2 em torno do ponto $a = 1$.

   (b) **[2.0 val.]** Utilizando a alínea anterior prove que

$$f(x) < x + \log(2) - 1, \ \forall x > 1.$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| \, e^{1/x}, & \text{se } x < 0 \\ 2 - \cos(x)e^x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.

   (b) **[1.5 val.]** Caracterize a função derivada de f.

   (c) **[2.0 val.]** Estude a monotonia e extremos de f.

   (d) **[2.5 val.]** Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}_0^+$.

4. **[2.0 val.]** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f\big(\cos(x)\big)$. Determine e classifique os extremos relativos da função g.