



Grelha de Correção do Enunciado B

Análise Matemática I

2º Teste – 26 de Novembro de 2016

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e cuja derivada é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ x^3 + 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

O contradomínio de f é:

- (a) $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
(b) $[-1, +\infty[$.
(c) $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.
(d) $\mathbb{R}$.

2. Seja $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $H(n) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Qual das seguintes afirmações é correcta para a equação $H(x) = \frac{1}{2}$?

- (a) Não tem soluções.
(b) Tem duas soluções.
(c) Tem mais de duas soluções, mas em número finito.
(d) Tem infinitas soluções.

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(xe^x)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) g é crescente em $\mathbb{R}$.
(b) $g(-1)$ é máximo local de g .
(c) $g(-1)$ é mínimo local de g .
(d) $x = 0$ é ponto de estacionaridade de g .

4. Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e, para cada $x > 0$,

$$\exists c \in]0, x[: f(x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} \left(\frac{4}{(c+1)^3} + \frac{1}{(c+1)^2} \right).$$

Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}}{x^3}$?

(a) $-\frac{1}{2}.$

(b) $\frac{1}{2}.$

(c) $-\frac{1}{6} \left(\frac{4}{(c+1)^3} + \frac{1}{(c+1)^2} \right) + \frac{1}{3}.$

(d) 1.

5. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $]0, 1[$. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(a) $\exists c \in]0, 1[: f(c) = \frac{1}{2}.$

(c) $\exists c \in]0, 1[: f'(c) = 0.$

(b) $\exists c \in]0, 1[: f'(c) = f(1) - f(0).$

(d) $\exists c \in]0, 1[: f(c) = f(1) - f(0).$

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. [3.0 val.] Determine constantes reais a , b e c tais que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(x+1) - (ax^2 + bx + c)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Resposta: Sejam $f(x) = e^x \log(x+1) - (ax^2 + bx + c)$ e $g(x) = x^2$. Aplicando a álgebra dos limites a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(x+1) - (ax^2 + bx + c)}{x^2}$$

verificamos que se $c = 0$ obtemos uma indeterminação $\frac{0}{0}$ e que se $c \neq 0$ obtemos ∞ para resultado do limite. Como pretendemos obter um limite finito temos de admitir que $c = 0$.

As funções f e g são diferenciáveis em $I =]-1, 1[$, a primeira por ser a soma de uma função polinomial com o produto da função exponencial pela composição da função logarítmica com uma função polinomial, e a segunda por ser polinomial. Temos

$$f'(x) = e^x \log(x+1) + \frac{e^x}{x+1} - (2ax + b)$$

e, além disso, $g'(x) = 2x \neq 0, \forall x \in I \setminus \{0\}$. Se existir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

estamos nas condições da Regra de Cauchy para calcular o limite pretendido.

Mas ao calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(x+1) + \frac{e^x}{x+1} - (2ax + b)}{2x}$$

verificamos que se $b = 1$ obtemos novamente uma indeterminação $\frac{0}{0}$ e que se $b \neq 1$ obtemos ∞ para resultado do limite. Como pretendemos obter um limite finito temos de admitir que $b = 1$.

As funções f' e g' são diferenciáveis em I , tendo-se

$$f''(x) = e^x \log(x+1) + \frac{e^x}{x+1} + \frac{xe^x}{(x+1)^2} - 2a$$

e $g''(x) = 2 \neq 0, \forall x \in I \setminus \{0\}$. Se existir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

estamos nas condições da Regra de Cauchy para calcular o limite pretendido. Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(x+1) + \frac{e^x}{x+1} + \frac{xe^x}{(x+1)^2} - 2a}{2} = \frac{1-2a}{2}$$

Como queremos que o valor deste limite seja $\frac{3}{2}$ basta fazer $\frac{1-2a}{2} = \frac{3}{2}$, isto é, $a = -1$.

2. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(x^2 + 1)$.

- (a) [1.5 val.] Escreva a Fórmula de Taylor de f com resto de Lagrange de ordem 2 em torno do ponto $a = 1$.
- (b) [2.0 val.] Utilizando a alínea anterior prove que

$$f(x) < x + \log(2) - 1, \forall x > 1.$$

Resposta: (a) A função f é de classe C^∞ no seu domínio $D = \mathbb{R}$. Pelo Teorema de Taylor, existe c , entre x e 1, tal que

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(c) \frac{(x-1)^2}{2!}.$$

Calculemos as duas primeiras derivadas de f :

$$f'(x) = (\log(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Em $x = 1$ obtemos $f(1) = \log(2)$ e $f'(1) = 1$ e em $x = c$, $f''(c) = \frac{2(1 - c^2)}{(c^2 + 1)^2}$.

A fórmula de Taylor de f é

$$f(x) = \log(2) + (x-1) + \frac{2(1 - c^2)}{(c^2 + 1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$= \log(2) + (x-1) + \frac{1 - c^2}{(c^2 + 1)^2} \cdot (x-1)^2,$$

com $1 < c < x \vee x < c < 1$.

(b) Pela alínea anterior temos que se $x > 1$ então existe $c \in]1, x[$ tal que

$$f(x) = \log(2) + (x - 1) + \frac{1 - c^2}{(c^2 + 1)^2} \cdot (x - 1)^2.$$

Mas se $c \in]1, x[$ então $\frac{1 - c^2}{(c^2 + 1)^2} < 0$, o que implica que $\frac{1 - c^2}{(c^2 + 1)^2} \cdot (x - 1)^2 < 0$.
Então

$$f(x) = \log(2) + (x - 1) + \frac{1 - c^2}{(c^2 + 1)^2} \cdot (x - 1)^2 < \log(2) + (x - 1) = x + \log(2) - 1.$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x + 2| e^{1/x}, & \text{se } x < 0 \\ 2 - \cos(x)e^x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) [0.5 val.] Determine o domínio de f .
 (b) [1.5 val.] Caracterize a função derivada de f .
 (c) [2.0 val.] Estude a monotonia e extremos de f .
 (d) [2.5 val.] Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}_0^+$.

Resposta: (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}$.

(b) Começemos por reescrever a função:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} (x + 2) e^{1/x}, & \text{se } x + 2 \geq 0 \text{ e } x < 0 \\ -(x + 2) e^{1/x}, & \text{se } x + 2 < 0 \text{ e } x < 0 \\ 2 - \cos(x)e^x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x + 2) e^{1/x}, & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -(x + 2) e^{1/x}, & \text{se } x < -2 \\ 2 - \cos(x)e^x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \left((x + 2) e^{1/x}\right)', & \text{se } -2 < x < 0 \\ -\left((x + 2) e^{1/x}\right)', & \text{se } x < -2 \text{ e } x < 0 \\ (2 - \cos(x)e^x)', & \text{se } x > 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{1/x} - (x + 2) \cdot \frac{1}{x^2} e^{1/x}, & \text{se } -2 < x < 0 \\ -\left(e^{1/x} - (x + 2) \cdot \frac{1}{x^2} e^{1/x}\right), & \text{se } x < -2 \\ \sin(x)e^x - \cos(x)e^x, & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) e^{1/x}, & \text{se } -2 < x < 0 \\ -\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) e^{1/x}, & \text{se } x < -2 \\ (\sin(x) - \cos(x))e^x, & \text{se } x > 0. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{1/x}, & \text{se } -2 < x < 0 \\ -\frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{1/x}, & \text{se } x < -2 \\ (\sin(x) - \cos(x))e^x, & \text{se } x > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vejamos se f é contínua em $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \cos(x))e^x = 1; \\
\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} |x + 2| e^{1/x} = 0.
\end{aligned}$$

Como os limites laterais são diferentes, f não tem limite em $x = 0$ e, portanto, não é contínua. Podemos assim concluir que não existe $f'(0)$.

Vejamos se f é contínua em $x = -2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 2) e^{1/x} = 0; \\
\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} -(x + 2) e^{1/x} = 0.
\end{aligned}$$

Como os limites laterais são iguais a $f(-2)$ a função é contínua em $x = -2$. Não é diferenciável nesse ponto porque

$$\begin{aligned}
f'_d(-2) &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{1/x} = e^{-1/2}; \\
f'_e(-2) &\stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} -\frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{1/x} = -e^{-1/2}.
\end{aligned}$$

As igualdades (1) e (2) verificam-se porque f é contínua em $x = -2$ e os limites apresentados existem. Este resultado é uma aplicação da Regra de Cauchy.

(c) Verifica-se que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2 = 0 \wedge x < 0) \vee (\sin(x) - \cos(x) = 0 \wedge x > 0),$$

isto é,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Estudemos o sinal da primeira derivada para determinarmos a monotonia da função e eventuais extremos.

A função $\sin(x) - \cos(x)$ é periódica de período 2π e $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o que nos permite fazer o estudo num intervalo de amplitude 2π , no caso em que $x > 0$.

		-2		-1		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$	-	////	+	0	-	////	-	0	+	0	-	$-e^{2\pi}$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

A função é decrescente nos intervalos $] - \infty, -2[$, $] - 1, 0[$, $] 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi[$ e $] \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{N}_0$.

A função é crescente nos intervalos $] - 2, -1[$ e $] \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Existem mínimos locais em $x = -2$ e em $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$, isto é, $f(-2) = 0$ e $f\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = 2 - e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{N}_0$, são mínimos locais de f .

Em $x = -1$ e em $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$, f tem máximos locais, isto é, $f(-1) = 5$ e $f\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$ são máximos locais de f .

Como f é decrescente nos intervalos $] - 1, 0[$ e $] 0, \frac{\pi}{4}[$, tendo em atenção que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0,$$

podemos concluir que f tem um máximo relativo em $x = 0$.

(d) Se $x > 0$ temos

$$f''(x) = (\sin(x) - \cos(x))e^x + (\cos(x) + \sin(x))e^x = 2e^x \sin(x),$$

portanto,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como

$$f'''(x) = 2(\sin(x) + \cos(x))e^x$$

temos

$$f'''(k\pi) = 2(\sin(k\pi) + \cos(k\pi))e^{k\pi} = 2e^{k\pi} \cos(k\pi) = 2(-1)^k e^{k\pi} \neq 0.$$

Como a primeira derivada que não se anula em $x = k\pi$ é de ordem ímpar podemos afirmar, pelo Teorema de Taylor, que o gráfico de f tem pontos de inflexão em $(k\pi, f(k\pi)) = (k\pi, 2 - (-1)^k e^{k\pi})$, $k \in \mathbb{N}$.

4. [2.0 val.] Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(\cos(x))$. Determine e classifique os extremos relativos da função g .

Resposta: Se f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e a função coseno é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$, então g é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Se existirem extremos de g serão necessariamente zeros de g' . Pelo teorema da derivação da função composta temos

$$g'(x) = (\cos(x))' \cdot f'(\cos(x)) = -\sin(x) \cdot f'(\cos(x)),$$

portanto,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee f'(\cos(x)) = 0.$$

Mas se $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então f' é estritamente crescente o que implica que é injectiva. Então, se $f'(0) = 0$ podemos afirmar que

$$f'(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0.$$

Em consequência temos

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-\sin(x) \cdot f'(\cos(x)))' = -\cos(x) \cdot f'(\cos(x)) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \cdot f''(\cos(x)) \\ &= -\cos(x) \cdot f'(\cos(x)) + \sin^2(x) \cdot f''(\cos(x)) \end{aligned}$$

temos

$$g''\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = f''(0)$$

e

$$\begin{aligned} g''(k\pi) &= -\cos(k\pi) \cdot f'(\cos(k\pi)) = -(-1)^k \cdot f'((-1)^k) \\ &= \begin{cases} f'(-1), & \text{se } k \text{ ímpar} \\ -f'(1), & \text{se } k \text{ par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $f''(0) > 0$ podemos concluir, pelo Teorema de Taylor, que em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, g tem mínimos relativos. Visto que f' é estritamente crescente e $f'(0) = 0$ podemos afirmar que $f'(x) > 0$ se $x > 0$ e $f'(x) < 0$ se $x < 0$, portanto, $f'(-1) < 0$ e $-f'(1) < 0$. Novamente pelo Teorema de Taylor concluimos que em $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, a função g tem máximos relativos.