



Enunciado A

Análise Matemática I

3º Teste — 19 de Dezembro de 2016

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$. Então $\int_0^{\log(\sqrt{3})} f(x) dx$ é igual a:

(a) $\frac{\pi}{12}$.

(b) $\frac{\pi}{6}$.

(c) $-\frac{\pi}{6}$.

(d) $-\frac{\pi}{12}$.

2. A primitiva $F(x)$ de $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, definida no intervalo $]0, +\infty[$, que satisfaz $F\left(\frac{1}{\pi}\right) = 1$, verifica também:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 3$.

(c) $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0$.

(b) $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$.

3. Seja g uma função polinomial de grau menor ou igual a 3. A função racional

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x + 1)}$$

tem a seguinte decomposição em fracções simples, onde A , B , C e D são constantes reais:

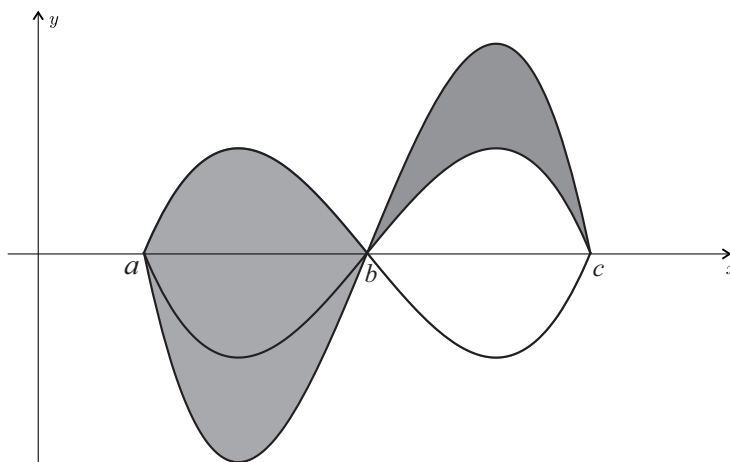
(a) $\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx}{x^2-2x+4}$.

(c) $\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+4}$.

(b) $\frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+4}$.

(d) $\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x^2-2x+4}$.

4. Na figura abaixo estão representados os gráficos das funções f , $-f$ e $2f$ definidas no intervalo $[a, c]$ e com um zero no ponto $x = b$.



A área sombreada é dada pelo integral

- (a) $\int_a^b f(x) dx - \int_b^c 2f(x) dx.$ (c) $\int_a^b 3f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$
 (b) $\int_b^a f(x) dx + \int_b^c 2f(x) dx.$ (d) $\int_b^a 3f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$

5. Seja f uma função contínua em $[0, 2]$ e $G(x) = \int_a^x f(t) dt$, com $a \in [0, 2]$. Considere as seguintes afirmações:

- I. Existe $b \in [0, 2]$ tal que $\int_0^2 G(t) dt = 2 \int_a^b f(t) dt$;
 II. G é contínua em $[0, 2]$, mas pode não ser integrável em $[0, 2]$;
 III. G é integrável em $[0, 2]$ uma vez que é contínua neste intervalo;
 IV. Existe $b \in [0, 2]$ tal que $2 \int_0^2 f(t) dt = G(b)$.

A **lista completa** das afirmações correctas é:

- (a) III. (c) III e IV.
 (b) I e III. (d) II e IV.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. [2,5 val.] Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_0^{e^2-1} \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2} dx.$$

2. Considere o integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3 \operatorname{sen}(x) + 2}{(\cos(x) + 2)(1 - \operatorname{sen}(x))} dx.$$

(a) [2.0 val.] Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3 \operatorname{sen}(x) + 2}{(\cos(x) + 2)(1 - \operatorname{sen}(x))} dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{4t^2 + 12t + 4}{(t^2 + 3)(t - 1)^2} dt.$$

(b) [2.5 val.] Calcule o valor do integral.

3. [2.0 val.] Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x) = 4 - x^2 \text{ e } g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

4. Considere a função F , real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_1^{x^3-8} \frac{\log(t^2)}{\sqrt{t+1}} dt.$$

(a) [2.0 val.] Determine o domínio de F . Justifique a sua resposta.

(b) [2.0 val.] Calcule a derivada de F . Justifique a sua resposta.

5. [2.0 val.] Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(x^2 + 1) \operatorname{arctg}(x)} - \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx.$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^\mu$ $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen}(t) \text{ ou } x = a \cos(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec(t) \text{ ou } x = a \operatorname{cosec}(t)$
$f(x) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$	$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$