FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Grelha de Correcção do Enunciado A

Análise Matemática I

3º Teste – 19 de Dezembro de 2016

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = \dfrac{2e^x}{1+e^{2x}}$. Então $\displaystyle\int_0^{\log(\sqrt{3})} f(x)\,dx$ é igual a:

   (a) $\dfrac{\pi}{12}$. $\boxed{\text{(b)}}$ $\dfrac{\pi}{6}$. (c) $-\dfrac{\pi}{6}$. (d) $-\dfrac{\pi}{12}$.

---

2. A primitiva $F(x)$ de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, definida no intervalo $]0,+\infty[$, que satisfaz $F\left(\dfrac{1}{\pi}\right) = 1$, verifica também:

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 3$.

   (b) $F\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = 1$.

   (c) $F\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = 0$.

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x) = 1$.

---

3. Seja g uma função polinomial de grau menor ou igual a 3. A função racional

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x^2-2x+4)(x^2-2x+1)}$$

tem a seguinte decomposição em fracções simples, onde A, B, C e D são constantes reais:

   (a) $\dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{Cx}{x^2-2x+4}$.

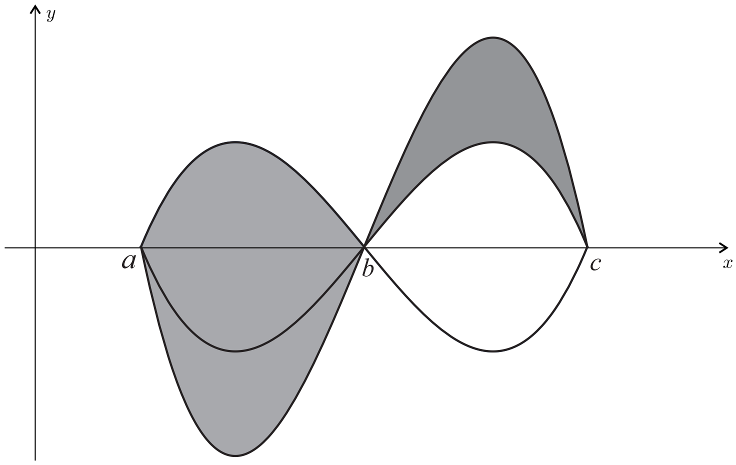
   (b) $\dfrac{Ax+B}{(x-1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2-2x+4}$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{Cx+D}{x^2-2x+4}$.

   (d) $\dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x^2-2x+4}$.

---

4. Na figura abaixo estão representados os gráficos das funções f, $-f$ e $2f$ definidas no intervalo $[a, c]$ e com um zero no ponto $x = b$.



A área sombreada é dada pelo integral

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c 2f(x)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx + \int_b^c 2f(x)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_a^b 3f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$

$\boxed{\text{(d)}}$ $\displaystyle\int_b^a 3f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$

---

5. Seja f uma função contínua em $[0, 2]$ e $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, com $a \in [0, 2]$. Considere as seguintes afirmações:

   I. Existe $b \in [0, 2]$ tal que $\displaystyle\int_0^2 G(t)\,dt = 2\int_a^b f(t)\,dt$;

   II. G é contínua em $[0, 2]$, mas pode não ser integrável em $[0, 2]$;

   III. G é integrável em $[0, 2]$ uma vez que é contínua neste intervalo;

   IV. Existe $b \in [0, 2]$ tal que $2\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt = G(b)$.

   A **lista completa** das afirmações correctas é:

(a) III.

$\boxed{\text{(b)}}$ I e III.

(c) III e IV.

(d) II e IV.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[2,5 val.]** Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_0^{e^2-1} \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}\,dx.$$

Resposta: Seja $h(x) = \dfrac{\log(x+1)}{(x+1)^2}$. Consideremos $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ e $g(x) = \log(x+1)$. Uma primitiva de f é $F(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ e $g'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, portanto,

$$\int_0^{e^2-1} \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x+1}\log(x+1)\right]_0^{e^2-1} + \int_0^{e^2-1} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$
$$= -\frac{\log(e^2)}{e^2} + \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^{e^2-1}$$
$$= -\frac{2}{e^2} + \left(-\frac{1}{e^2} + 1\right) = -\frac{3}{e^2} + 1.$$

2. Considere o integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3\operatorname{sen}(x) + 2}{\big(\cos(x) + 2\big)\big(1 - \operatorname{sen}(x)\big)}\,dx.$$

(a) **[2.0 val.]** Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3\operatorname{sen}(x) + 2}{\big(\cos(x) + 2\big)\big(1 - \operatorname{sen}(x)\big)}\,dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{4t^2 + 12t + 4}{(t^2+3)(t-1)^2}\,dt.$$

(b) **[2.5 val.]** Calcule o valor do integral.

Resposta: (a) A substituição indicada é $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right) = t = \varphi^{-1}(x)$ o que implica que

$$\varphi^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \text{e} \quad \varphi^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Além disso, $x = \varphi(t) = 2\operatorname{arctg}(t)$ e $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$. Utilizando as fórmulas trigonométricas obtemos $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3\operatorname{sen}(x) + 2}{\big(\cos(x) + 2\big)\big(1 - \operatorname{sen}(x)\big)}\,dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2} + 2}{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 2\right)\left(1 - \dfrac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{\dfrac{6t + 2 + 2t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1 - t^2 + 2 + 2t^2}{1+t^2} \cdot \dfrac{1 + t^2 - 2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{\dfrac{2t^2 + 6t + 2}{1+t^2}}{\dfrac{(3+t^2)(t^2-2t+1)}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{2(2t^2+6t+2)}{(3+t^2)(t^2-2t+1)}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{4t^2 + 12t + 4}{(3+t^2)(t-1)^2}\,dt.$$

(b) O polinómio $(3+t^2)(t-1)^2$ tem uma raiz real com multiplicidade 2 e um par de raízes complexas com multiplicidade 1. Então

$$\begin{aligned}
&\frac{4t^2+12t+4}{(3+t^2)(t-1)^2} = \frac{A}{(t-1)^2} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+3} \\
= &\frac{A(t^2+3)+B(t-1)(t^2+3)+(Ct+D)(t-1)^2}{(t-1)^2(t^2+3)} \\
= &\frac{(B+C)t^3+(A-B-2C+D)t^2+(3B+C-2D)t+3A-3B+D}{(t-1)^2(t^2+3)}.
\end{aligned}$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados temos

$$\begin{cases} B+C &= 0 \\ A-B-2C+D &= 4 \\ 3B+C-2D &= 12 \\ 3A-3B+D &= 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A &= 5 \\ B &= \dfrac{5}{2} \\ C &= -\dfrac{5}{2} \\ D &= -\dfrac{7}{2}, \end{cases}$$

portanto,

$$\frac{4t^2+12t+4}{(3+t^2)(t-1)^2} = \frac{5}{(t-1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{t-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5t+7}{t^2+3}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3\operatorname{sen}(x)+2}{\big(\cos(x)+2\big)\big(1-\operatorname{sen}(x)\big)}\,dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{4t^2+12t+4}{(3+t^2)(t-1)^2}\,dt \\
= &\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{5}{(t-1)^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{5}{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{5t+7}{t^2+3}\,dt \\
= &\left[-\frac{5}{t-1}\right]_{-1}^{\sqrt{3}/3} + \frac{5}{2}\Big[\log|t-1|\Big]_{-1}^{\sqrt{3}/3} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{5t}{t^2+3}\,dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{7}{t^2+3}\,dt \\
= &\frac{15}{3-\sqrt{3}} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\log\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{5}{4}\Big[\log(t^2+3)\Big]_{-1}^{\sqrt{3}/3} - \frac{7}{2\sqrt{3}}\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt \\
= &\frac{15}{3-\sqrt{3}} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\log\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{5}{4}\log\left(\frac{5}{6}\right) - \frac{7}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^{\sqrt{3}/3} \\
= &\frac{15}{3-\sqrt{3}} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\log\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{5}{4}\log\left(\frac{5}{6}\right) - \frac{7}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
= &\frac{15}{3-\sqrt{3}} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\log\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{5}{4}\log\left(\frac{5}{6}\right) - \frac{7}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

3. **[2.0 val.]** Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x) = 4-x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^3-x^2-4x+4.$$

Resposta: Comecemos por determinar os pontos de intersecção dos gráficos das funções. As abcissas desses pontos são obtidas resolvendo a equação $f(x) = g(x)$:

$$4 - x^2 = x^3 - x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2.$$

Como $g(-1) = 6$, $f(-1) = 3$, $g(1) = 0$ e $f(1) = 3$ podemos afirmar que $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [-2, 0]$, e $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [0, 2]$. A área pedida é dada por

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{0} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx + \int_{0}^{2} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \\
&= \int_{-2}^{0} \big(x^3 - x^2 - 4x + 4 - (4 - x^2)\big)\, dx + \int_{0}^{2} \big(4 - x^2 - (x^3 - x^2 - 4x + 4)\big)\, dx \\
&= \int_{-2}^{0} \big(x^3 - 4x\big)\, dx + \int_{0}^{2} \big(-x^3 + 4x\big)\, dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{0}^{2} = 8.
\end{aligned}$$

4. Considere a função F, real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_{1}^{x^3-8} \frac{\log(t^2)}{\sqrt{t+1}}\, dt.$$

(a) **[2,0 val.]** Determine o domínio de F. Justifique a sua resposta.

(b) **[2,0 val.]** Calcule a derivada de F. Justifique a sua resposta.

Resposta: (a) A função F é a composição de $h(x) = x^3 - 8$ com $G(y) = \displaystyle\int_{1}^{y} \frac{\log(t^2)}{\sqrt{t+1}}\, dt$, isto é, podemos escrever $F(x) = G(h(x))$. Designemos por A o domínio de h e por B o domínio de G. O domínio, D, de F é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \wedge h(x) \in B\}.$$

Temos $A = \mathbb{R}$. Para determinar B começamos por calcular o domínio, C, da função integranda $g(x) = \dfrac{\log(x^2)}{\sqrt{x+1}}$.

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \wedge x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x > -1\} =]-1, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Para que o intervalo de extremos 1 e y esteja contido em C é necessário e suficiente que $y > 0$. Podemos concluir que $B = \mathbb{R}^+$. Então

$$D = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \in \mathbb{R}^+\} = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 8 > 0\} =]2, +\infty[.$$

(b) A função g é contínua em C, portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral G é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e

$$G'(x) = g(x) = \frac{\log(x^2)}{\sqrt{x+1}}.$$

Como h é diferenciável em $\mathbb{R}$ podemos afirmar, pelo teorema da derivação da função composta, que F é diferenciável em $]2, +\infty[$ e

$$F'(x) = G'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{\log\big((x^3-8)^2\big)}{\sqrt{x^3 - 8 + 1}} \cdot 3x^2 = \frac{\log\big((x^3-8)^2\big)}{\sqrt{x^3 - 7}} \cdot 3x^2,\ \forall x \in]2, +\infty[.$$

5. **[2.0 val.]** Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{arctg}(x)} - \frac{1}{x^2}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx.$$

Resposta: A função integranda tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua nesse conjunto, portanto, é contínua no intervalo de integração. Por esse motivo o integral é impróprio de primeira espécie. Por definição

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{arctg}(x)} - \frac{1}{x^2}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \left(\frac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{arctg}(x)} - \frac{1}{x^2}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[\log(\mathrm{arctg}(x)) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(\log(\mathrm{arctg}(t)) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) - \log(\mathrm{arctg}(1)) + \cos(1)\right) \\
&= \log\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 - \log\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(1) = \log(2) - 1 + \cos(1).
\end{aligned}$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^\mu$ $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\mathrm{sen}(t)$ ou $x = a\,\cos(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(t)$ ou $x = a\,\mathrm{cosec}(t)$
$f(x) = R(\mathrm{sen}(x), \cos(x))$	$\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$