



Grelha de Correção do Enunciado B

Análise Matemática I

3º Teste – 19 de Dezembro de 2016

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$. Então $\int_0^{\log(\sqrt{3})} f(x) dx$ é igual a:

- (a) $\frac{\pi}{12}$. (b) $-\frac{\pi}{6}$. (c) $-\frac{\pi}{12}$. ☒ (d) $\frac{\pi}{6}$.

2. A primitiva $F(x)$ de $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, definida no intervalo $]0, +\infty[$, que satisfaz $F\left(\frac{1}{\pi}\right) = 1$, verifica também:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 3$. ☒ (c) $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0$.
(b) $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1$. (d) $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$.

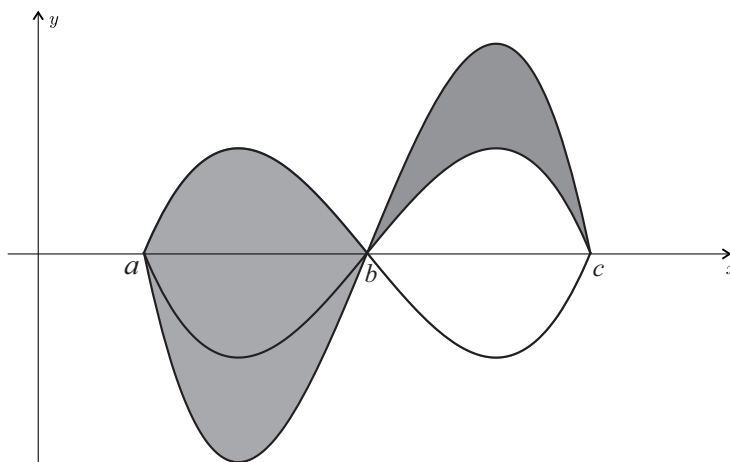
3. Seja g uma função polinomial de grau menor ou igual a 3. A função racional

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 1)}$$

tem a seguinte decomposição em fracções simples, onde A , B , C e D são constantes reais:

- (a) $\frac{Ax}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx}{x^2-2x+4}$. (c) $\frac{Ax+B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+4}$.
☒ (b) $\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+4}$. (d) $\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x^2-2x+4}$.

4. Na figura abaixo estão representados os gráficos das funções f , $-f$ e $2f$ definidas no intervalo $[a, c]$ e com um zero no ponto $x = b$.



A área sombreada é dada pelo integral

- (a) $\int_b^a 3f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$ (c) $\int_a^b f(x) dx - \int_b^c 2f(x) dx.$
 (b) $\int_a^b 3f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$ (d) $\int_b^a f(x) dx + \int_b^c 2f(x) dx.$

5. Seja f uma função contínua em $[0, 4]$ e $G(x) = \int_a^x f(t) dt$, com $a \in [0, 4]$. Considere as seguintes afirmações:

- I. Existe $b \in [0, 4]$ tal que $\int_0^4 G(t) dt = 4 \int_a^b f(t) dt$;
 II. G é contínua em $[0, 4]$, mas pode não ser integrável em $[0, 4]$;
 III. G é integrável em $[0, 4]$ uma vez que é contínua neste intervalo;
 IV. Existe $b \in [0, 4]$ tal que $4 \int_0^4 f(t) dt = G(b)$.

A **lista completa** das afirmações correctas é:

- (a) III. (c) I e III.
 (b) III e IV. (d) II e IV.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. [2,5 val.] Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_0^{e^2-1} \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2} dx.$$

Resposta: Seja $h(x) = \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}$. Consideremos $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ e $g(x) = \log(x+1)$. Uma primitiva de f é $F(x) = -\frac{1}{x+1}$ e $g'(x) = \frac{1}{x+1}$, portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{e^2-1} \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2} dx &= \left[-\frac{1}{x+1} \log(x+1) \right]_0^{e^2-1} + \int_0^{e^2-1} \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &= -\frac{\log(e^2)}{e^2} + \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^{e^2-1} \\ &= -\frac{2}{e^2} + \left(-\frac{1}{e^2} + 1 \right) = -\frac{3}{e^2} + 1.\end{aligned}$$

2. Considere o integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3 \operatorname{sen}(x) + 2}{(\cos(x) + 2)(1 - \operatorname{sen}(x))} dx.$$

(a) [2.0 val.] Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3 \operatorname{sen}(x) + 2}{(\cos(x) + 2)(1 - \operatorname{sen}(x))} dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{4t^2 + 12t + 4}{(t^2 + 3)(t - 1)^2} dt.$$

(b) [2.5 val.] Calcule o valor do integral.

Resposta: (a) A substituição indicada é $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t = \varphi^{-1}(x)$ o que implica que

$$\varphi^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \text{e} \quad \varphi^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Além disso, $x = \varphi(t) = 2 \operatorname{arctg}(t)$ e $\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$. Utilizando as fórmulas trigonométricas obtemos $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3 \operatorname{sen}(x) + 2}{(\cos(x) + 2)(1 - \operatorname{sen}(x))} dx &= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 2}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\right)\left(1 - \frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{\frac{6t + 2 + 2t^2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2 + 2 + 2t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2 - 2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{\frac{2t^2 + 6t + 2}{1+t^2}}{\frac{(3+t^2)(t^2 - 2t + 1)}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{2(2t^2 + 6t + 2)}{(3+t^2)(t^2 - 2t + 1)} dt \\ &= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{4t^2 + 12t + 4}{(3+t^2)(t-1)^2} dt.\end{aligned}$$

- (b) O polinómio $(3+t^2)(t-1)^2$ tem uma raiz real com multiplicidade 2 e um par de raízes complexas com multiplicidade 1. Então

$$\begin{aligned}\frac{4t^2 + 12t + 4}{(3+t^2)(t-1)^2} &= \frac{A}{(t-1)^2} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+3} \\ &= \frac{A(t^2+3) + B(t-1)(t^2+3) + (Ct+D)(t-1)^2}{(t-1)^2(t^2+3)} \\ &= \frac{(B+C)t^3 + (A-B-2C+D)t^2 + (3B+C-2D)t + 3A-3B+D}{(t-1)^2(t^2+3)}.\end{aligned}$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados temos

$$\begin{cases} B+C &= 0 \\ A-B-2C+D &= 4 \\ 3B+C-2D &= 12 \\ 3A-3B+D &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = \frac{5}{2} \\ C = -\frac{5}{2} \\ D = -\frac{7}{2}, \end{cases}$$

portanto,

$$\frac{4t^2 + 12t + 4}{(3+t^2)(t-1)^2} = \frac{5}{(t-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5t+7}{t^2+3}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3\sin(x) + 2}{(\cos(x) + 2)(1 - \sin(x))} dx &= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{4t^2 + 12t + 4}{(3+t^2)(t-1)^2} dt \\ &= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{5}{(t-1)^2} dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{5}{t-1} dt - \frac{1}{2} \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{5t+7}{t^2+3} dt \\ &= \left[-\frac{5}{t-1} \right]_{-1}^{\sqrt{3}/3} + \frac{5}{2} \left[\log|t-1| \right]_{-1}^{\sqrt{3}/3} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{5t}{t^2+3} dt - \frac{1}{2} \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{7}{t^2+3} dt \\ &= \frac{15}{3-\sqrt{3}} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \log \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6} \right) - \frac{5}{4} \left[\log(t^2+3) \right]_{-1}^{\sqrt{3}/3} - \frac{7}{2\sqrt{3}} \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right)^2} dt \\ &= \frac{15}{3-\sqrt{3}} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \log \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6} \right) - \frac{5}{4} \log \left(\frac{5}{6} \right) - \frac{7}{2\sqrt{3}} \left[\arctg \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right]_{-1}^{\sqrt{3}/3} \\ &= \frac{15}{3-\sqrt{3}} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \log \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6} \right) - \frac{5}{4} \log \left(\frac{5}{6} \right) - \frac{7}{2\sqrt{3}} \left(\arctg \left(\frac{1}{3} \right) - \arctg \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= \frac{15}{3-\sqrt{3}} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \log \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6} \right) - \frac{5}{4} \log \left(\frac{5}{6} \right) - \frac{7}{2\sqrt{3}} \left(\arctg \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{\pi}{6} \right).\end{aligned}$$

3. [2.0 val.] Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x) = 4 - x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

Resposta: Começemos por determinar os pontos de intersecção dos gráficos das funções. As abcissas desses pontos são obtidas resolvendo a equação $f(x) = g(x)$:

$$4 - x^2 = x^3 - x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2.$$

Como $g(-1) = 6$, $f(-1) = 3$, $g(1) = 0$ e $f(1) = 3$ podemos afirmar que $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [-2, 0]$, e $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [0, 2]$. A área pedida é dada por

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 4x + 4 - (4 - x^2)) dx + \int_0^2 (4 - x^2 - (x^3 - x^2 - 4x + 4)) dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = 8. \end{aligned}$$

4. Considere a função F , real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_1^{x^3-8} \frac{\log(t^2)}{\sqrt{t+1}} dt.$$

(a) [2,0 val.] Determine o domínio de F . Justifique a sua resposta.

(b) [2,0 val.] Calcule a derivada de F . Justifique a sua resposta.

Resposta: (a) A função F é a composição de $h(x) = x^3 - 8$ com $G(y) = \int_1^y \frac{\log(t^2)}{\sqrt{t+1}} dt$, isto é, podemos escrever $F(x) = G(h(x))$. Designemos por A o domínio de h e por B o domínio de G . O domínio, D , de F é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \wedge h(x) \in B\}.$$

Temos $A = \mathbb{R}$. Para determinar B começamos por calcular o domínio, C , da função integranda $g(x) = \frac{\log(x^2)}{\sqrt{x+1}}$.

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \wedge x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x > -1\} =]-1, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Para que o intervalo de extremos 1 e y esteja contido em C é necessário e suficiente que $y > 0$. Podemos concluir que $B = \mathbb{R}^+$. Então

$$D = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \in \mathbb{R}^+\} = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 8 > 0\} =]2, +\infty[.$$

(b) A função g é contínua em C , portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral G é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e

$$G'(x) = g(x) = \frac{\log(x^2)}{\sqrt{x+1}}.$$

Como h é diferenciável em $\mathbb{R}$ podemos afirmar, pelo teorema da derivação da função composta, que F é diferenciável em $]2, +\infty[$ e

$$F'(x) = G'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{\log((x^3-8)^2)}{\sqrt{x^3-8+1}} \cdot 3x^2 = \frac{\log((x^3-8)^2)}{\sqrt{x^3-7}} \cdot 3x^2, \forall x \in]2, +\infty[.$$

5. [2.0 val.] Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(x^2 + 1) \operatorname{arctg}(x)} - \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx.$$

Resposta: A função integranda tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua nesse conjunto, portanto, é contínua no intervalo de integração. Por esse motivo o integral é impróprio de primeira espécie. Por definição

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(x^2 + 1) \operatorname{arctg}(x)} - \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \left(\frac{1}{(x^2 + 1) \operatorname{arctg}(x)} - \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\log(\operatorname{arctg}(x)) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\log(\operatorname{arctg}(t)) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - \log(\operatorname{arctg}(1)) - \operatorname{sen}(1) \right) \\ &= \log\left(\frac{\pi}{2}\right) - \log\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}(1) = \log(2) - \operatorname{sen}(1). \end{aligned}$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^\mu$ $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen}(t) \text{ ou } x = a \cos(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec(t) \text{ ou } x = a \operatorname{cosec}(t)$
$f(x) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$	$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$