FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I

Exame de Época de Recurso — 27 de Junho de 2017

1. **[1.5 val.]** Seja A o conjunto dos termos da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$u_n = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 - \dfrac{2}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Determine o interior, a fronteira, a aderência e o derivado de $B = \Big(\,]0,2[\,\setminus\{1\}\Big) \cup A$.

2. **[1.5 val.]** Calcule o limite da sucessão $a_n = \displaystyle\sum_{k=4}^{2n+3} \frac{3\,\mathrm{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2+2k}}$.

3. **[1.0 val.]** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(1) = 0$. Prove que existe $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{|1-x|}, & \text{se } x \geq 0 \\ x - \mathrm{sen}(x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   (a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.

   (b) **[1.0 val.]** Caracterize a função derivada de f.

   (c) **[1.0 val.]** Estude a monotonia e extremos de f.

   (d) **[1.0 val.]** Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}_0^-$.

5. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^x + \log(x+1).$$

   (a) **[1.5 val.]** Usando o método de indução matemática prove a seguinte igualdade

$$f^{(n)}(x) = e^x - \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x+1)^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (b) **[1.0 val.]** Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n de f, com resto de Lagrange.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I

Exame de Época de Recurso — 27 de Junho de 2017

6. Calcule o valor dos seguintes integrais:

a) **[1,0 val.]** $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{3x^2-7x+15}{(x-2)(x^2+9)}\,dx$;

b) **[1,0 val.]** $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{x}\log(x)\,dx$.

7. **[1,5 val.]** Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2+\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\big(2-\operatorname{sen}^2(x)\big)}\,dx = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{2t^2+t+2}{t^2(t^2+2)}\,dt.$$

8. **[1,5 val.]** Determine a área do domínio plano limitado, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, pelos gráficos das funções

$$f(x)=\operatorname{sen}(2x) \quad \text{e} \quad g(x)=\cos(x)$$

9. Considere a função F, real de variável real, definida por

$$F(x)=\int_{-2}^{2x-4} \frac{e^t}{\log(t^2)}\,dt.$$

(a) **[1,0 val.]** Determine o domínio de F. Justifique a sua resposta.

(b) **[1,0 val.]** Calcule a derivada de F. Justifique a sua resposta.

(c) **[1,0 val.]** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{x^2-1}$.

10. Considere o seguinte integral impróprio, onde $a\in\mathbb{R}_0^-$,

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$$

(a) **[1.0 val.]** Classifique o integral impróprio em função do parâmetro a.

(b) **[1.0 val.]** Calcule o valor do integral para $a=0$.

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^{\mu}, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c})$	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \sqrt{a}\,x + t$, se $a > 0$ $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,x + \sqrt{c}$, se $c > 0$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$ $R(-\text{sen}(x), -\cos(x)) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(x) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$