FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado B

Análise Matemática I

Repetição do 1º Teste — 27 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

Seja A o conjunto dos termos da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$u_n = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \\[2mm] 3 - \dfrac{2}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Considere o conjunto $B = \Big( ]0,2[\setminus \{1\} \Big) \cup A$.

1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
   - (a) O conjunto dos minorantes de B é $]-\infty, -1]$ e $\min(B) = -1$.
   - (b) O conjunto dos majorantes de B é $]3, +\infty[$ e $\sup(B)$ não existe.
   - (c) O conjunto dos minorantes de B é $]-\infty, -1]$ e B não tem mínimo.
   - (d) O conjunto dos majorantes de B é $[3, +\infty[$ e $\max(B) = 3$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
   - (a) $\operatorname{int}(B) =]0,1[\cup]1,2[$ e B não é fechado.
   - (b) $\operatorname{int}(B) =]0,2[$ e B não é aberto nem fechado.
   - (c) $\operatorname{int}(B) =]0,2[$ e B é aberto.
   - (d) $\operatorname{int}(B) =]0,1[\cup]1,2[$ e B é aberto.

3. O conjunto S dos pontos isolados e o derivado de B são
   - (a) $S = A$ e $B' = [0,2]$.
   - (b) $S = A$ e $B' = [0,2] \cup \{-1,3\}$.
   - (c) $S = A \setminus \{1\}$ e $B' = [0,2] \cup \{-1,3\}$.
   - (d) $S = A \setminus \{1\}$ e $B' = [0,2]$.

4. Seja D o domínio da função real de variável real, f, definida por

$$f(x) = \frac{\log(24 - |x^2 - 25|)}{\left(\operatorname{arctg}(2x) + \frac{\pi}{4}\right)\,(e^{x^2} - e^{3x})}.$$

Qual a fronteira de D?

(a) $\{-7, -1, 0, 1, 7, -\frac{1}{2}\}$.
(b) $\{-7, -1, 0, 1, 3, 7\}$.
(c) $\{-7, -1, 1, 3, 7, -\frac{1}{2}\}$.
(d) $\{-7, -1, 1, 3, 7\}$.

5. Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado e (x_n) uma sucessão monótona de elementos de D. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) A sucessão (x_n) é convergente.
(b) A sucessão (x_n) não tem subsucessões monótonas.
(c) O limite de (x_n) pertence a D.
(d) A sucessão (x_n) não é limitada, mas tem subsucessões limitadas.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. Calcule, se existir, o valor dos seguintes limites:

(a) **[2.5 val.]** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^6 - 2}{n^6}\right)^{n^3+3}$;

(b) **[2.5 val.]** $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=4}^{2n+3} \frac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2 + 2k}}$.

2. Considere a sucessão definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1, \quad \forall\, n \geq 1. \end{cases}$$

(a) **[3.0 val.]** Prove, usando o Princípio de Indução Matemática, que

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) **[2.0 val.]** Utilizando a alínea anterior, calcule o seguinte limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \pi + \log\left(x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1\right), & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(a) **[1.5 val.]** Determine o domínio de f.

(b) **[2.0 val.]** Estude a continuidade de f no seu domínio.

(c) **[1.5 val.]** Averigúe se $x = 0$ é uma descontinuidade removível de f. Justifique.