FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Grelha de Correcção do Enunciado B

Análise Matemática I

Repetição do 1º Teste — 27 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

Seja A o conjunto dos termos da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$u_n = \begin{cases} -1+\dfrac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3-\dfrac{2}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Considere o conjunto $B = \Big(]0,2[\setminus\{1\}\Big) \cup A$.

1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
   - (a) O conjunto dos minorantes de B é $]-\infty,-1]$ e $\min(B)=-1$.
   - (b) O conjunto dos majorantes de B é $]3,+\infty[$ e $\sup(B)$ não existe.
   - $\boxed{\text{(c)}}$ O conjunto dos minorantes de B é $]-\infty,-1]$ e B não tem mínimo.
   - (d) O conjunto dos majorantes de B é $[3,+\infty[$ e $\max(B)=3$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
   - (a) $\text{int}(B)=]0,1[\cup]1,2[$ e B não é fechado.
   - $\boxed{\text{(b)}}$ $\text{int}(B)=]0,2[$ e B não é aberto nem fechado.
   - (c) $\text{int}(B)=]0,2[$ e B é aberto.
   - (d) $\text{int}(B)=]0,1[\cup]1,2[$ e B é aberto.

3. O conjunto S dos pontos isolados e o derivado de B são
   - (a) $S=A$ e $B'=[0,2]$.
   - (b) $S=A$ e $B'=[0,2]\cup\{-1,3\}$.
   - $\boxed{\text{(c)}}$ $S=A\setminus\{1\}$ e $B'=[0,2]\cup\{-1,3\}$.
   - (d) $S=A\setminus\{1\}$ e $B'=[0,2]$.

4. Seja D o domínio da função real de variável real, f, definida por

$$f(x) = \frac{\log(24 - |x^2 - 25|)}{\left(\operatorname{arctg}(2x) + \frac{\pi}{4}\right)\,(e^{x^2} - e^{3x})}.$$

Qual a fronteira de D?

(a) $\{-7, -1, 0, 1, 7, -\frac{1}{2}\}$.

(b) $\{-7, -1, 0, 1, 3, 7\}$.

(c) $\{-7, -1, 1, 3, 7, -\frac{1}{2}\}$.

$\boxed{\text{(d)}}$ $\{-7, -1, 1, 3, 7\}$.

5. Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado e (x_n) uma sucessão monótona de elementos de D. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

$\boxed{\text{(a)}}$ A sucessão (x_n) é convergente.

(b) A sucessão (x_n) não tem subsucessões monótonas.

(c) O limite de (x_n) pertence a D.

(d) A sucessão (x_n) não é limitada, mas tem subsucessões limitadas.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. Calcule, se existir, o valor dos seguintes limites:

(a) **[2.5 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^6 - 2}{n^6}\right)^{n^3+3}$;

(b) **[2.5 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=4}^{2n+3} \frac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2 + 2k}}$.

Resposta: (a) Designando por a_n o termo geral da sucessão podemos escrever

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n^6 - 2}{n^6}\right)^{n^3+3} = \left(1 - \frac{2}{n^6}\right)^{n^3+3} = \left(1 - \frac{2}{n^6}\right)^{n^3} \cdot \left(1 - \frac{2}{n^6}\right)^{3} \\ &= \left[\left(1 - \frac{2}{n^6}\right)^{n^6}\right]^{1/n^3} \cdot \left(1 - \frac{2}{n^6}\right)^{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $\lim n^6 = +\infty$, sabemos que

$$\lim \left(1 - \frac{2}{n^6}\right)^{n^6} = e^{-2}$$

e

$$\lim \left(1 - \frac{2}{n^6}\right)^{3} = 1,$$

portanto,

$$\lim a_n = \left(e^{-2}\right)^0 = 1.$$

(b) O termo geral a_n da sucessão está definido como a soma de $k = 4$ a $k = 2n + 3$ de $\dfrac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2 + 2k}}$. A maior parcela é $\dfrac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2 + 8}}$ (que corresponde a $k = 4$) e a menor é $\dfrac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2+4n+6}}$ (correspondente a $k = 2n+3$), como está demonstrado a seguir. Temos, para todo o n e $4 \leq k \leq 2n+3$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{9n^2+8} < \sqrt{9n^2+2k} \leq \sqrt{9n^2+4n+6} \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{9n^2+4n+6}} \leq \frac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2+2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{9n^2+8}} \\
\Rightarrow\ & \frac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2+4n+6}} \leq \frac{1}{\sqrt{9n^2+2k}} \leq \frac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2+8}}.
\end{aligned}$$

Como (a_n) está definida como uma soma de $2n+3-4+1 = 2n$ parcelas obtemos,

$$2n \cdot \frac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2+4n+6}} \leq \sum_{k=4}^{2n+3} \frac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2+2k}} < 2n \cdot \frac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2+8}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 6\operatorname{arctg}(n)\frac{n}{\sqrt{9n^2+4n+6}} \leq \sum_{k=4}^{2n+3} \frac{3\operatorname{arctg}(n)}{\sqrt{9n^2+2k}} \leq 6\operatorname{arctg}(n)\frac{n}{\sqrt{9n^2+8}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $b_n = \dfrac{n}{\sqrt{9n^2+4n+6}}$. Dividindo o numerador e o denominador da fracção que define a sucessão por n temos:

$$\lim b_n = \lim \frac{1}{\frac{\sqrt{9n^2+4n+6}}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{9n^2+4n+6}{n^2}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{9+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}}} = \frac{1}{3}.$$

Seja $c_n = \dfrac{n}{\sqrt{9n^2+8}}$.

$$\lim c_n = \lim \frac{1}{\frac{\sqrt{9n^2+8}}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{9n^2+8}{n^2}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{9+\frac{8}{n^2}}} = \frac{1}{3}.$$

Como $\lim 6\operatorname{arctg}(n) = 6\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi$ temos $\lim 6\operatorname{arctg}(n)\cdot b_n = \pi$ e $\lim 6\operatorname{arctg}(n)\cdot c_n = \pi$. Finalmente, como os dois limites são iguais, o Teorema das Sucessões Enquadradas permite-nos concluir que

$$\lim a_n = \pi.$$

2. Considere a sucessão definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1, \quad \forall\ n \geq 1. \end{cases}$$

(a) **[3.0 val.]** Prove, usando o Princípio de Indução Matemática, que

$$a_n = \frac{n^2+n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) **[2.0 val.]** Utilizando a alínea anterior, calcule o seguinte limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Resposta: (a) Seja $p(n)$ a proposição $a_n = \dfrac{n^2+n}{2}$. Se $n = 1$ obtemos $1 = \dfrac{1+1}{2}$ que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de Indução: $a_n = \dfrac{n^2+n}{2}$.

Tese de Indução: $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+n+1}{2}$.

Demonstração: Pela definição da sucessão temos

$$a_{n+1} = a_n + n + 1.$$

Aplicando a hipótese de indução obtemos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + n + 1 = \frac{n^2+n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+2n+1+n+1}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2+n+1}{2}. \end{aligned}$$

Pelo Princípio de Indução concluímos que

$$a_n = \frac{n^2+n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Como $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

$$\begin{aligned} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{\frac{(n+1)^2+n+1}{2}}{\frac{n^2+n}{2}} = \lim \frac{(n+1)^2+n+1}{n^2+n} \\ &= \lim \frac{n^2+3n+2}{n^2+n} = 1 \end{aligned}$$

podemos concluir que $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \pi + \log\left(x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1\right), & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(a) **[1.5 val.]** Determine o domínio de f.

(b) **[2.0 val.]** Estude a continuidade de f no seu domínio.

(c) **[1.5 val.]** Averigúe se $x = 0$ é uma descontinuidade removível de f. Justifique.

Resposta: (a)

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - \tfrac{5}{2}x + 1 > 0 \ \wedge \ x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \ \wedge \ x > 0\} \cup \{0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x < \tfrac{1}{2} \ \vee \ x > 2) \ \wedge \ x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \cup \{0\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Seja $x < 0$. Sejam $f_1(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ e $f_2(x) = \log(x)$. Em $]-\infty, 0[$ temos $f(x) = \pi + (f_2 \circ f_1)(x)$. Neste conjunto f_1 é positiva e é contínua por ser uma função polinomial. A função f_2 é contínua em $\mathbb{R}^+$ o que implica que $f_2 \circ f_1$ é contínua se $x < 0$. Podemos concluir que f é contínua se $x < 0$ por ser a soma de uma função contínua com uma função constante.

Seja $x > 0$. Sejam $g_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $g_2(x) = \dfrac{x^2}{2}$ e $g_3(x) = \operatorname{arctg}(x)$. Em $]0, +\infty[$ temos $f(x) = 2(g_3 \circ g_1)(x) + g_2(x)$. Neste conjunto g_1 é contínua por ser uma função racional cujo denominador não se anula. Como a função arco-tangente é contínua em $\mathbb{R}$ e a composição de funções contínuas é contínua, podemos afirmar que $2(g_3 \circ g_1)$ é contínua se $x > 0$. A função g_2 é contínua por ser uma função polinomial. Concluímos que f é contínua por ser a soma de funções contínuas.

Estudemos a continuidade em $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{2}\right) = \pi;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\pi + \log\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)\right) = \pi.$$

Como $f(0) = 2$, f não tem limite em $x = 0$ e, portanto, não é contínua neste ponto.

(c) Uma função f tem uma descontinuidade removível num ponto a se existir uma função g contínua em a e que difere de f apenas nesse ponto. Seja g a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} \pi + \log\left(x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1\right), & \text{se } x < 0 \\ \pi, & \text{se } x = 0 \\ 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como vimos na alínea anterior

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \pi;$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \pi$$

e $g(0) = \pi$, portanto, g é contínua em $x = 0$ e difere de f apenas neste ponto. Podemos concluir que $x = 0$ é uma descontinuidade removível de f.