FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado A

Análise Matemática I

Repetição do 2º Teste — 27 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $H(n) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Qual das seguintes afirmações é correcta para a equação $H'(x) = 0$?
   (a) Tem infinitas soluções.
   (b) Não tem soluções.
   (c) Tem duas soluções.
   (d) Tem mais de duas soluções, mas em número finito.

2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = -1$ e $f(1) = 3$. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \dfrac{1}{1+|f(x)|}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
   (a) g pode não ter mínimo em $[0,1]$.
   (b) O mínimo de g em $[0,1]$ é 0.
   (c) g pode não ter máximo em $[0,1]$.
   (d) O máximo de g em $[0,1]$ é 1.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f(0) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f\big(\operatorname{arctg}(x - x^2)\big) + \operatorname{arctg}\big(f(x)\big)$. Então
   (a) $g'(1) = 2\,g'(0)$.
   (b) $g'(0) = f'(1) + f'(0)$.
   (c) $2\,g'(1) + g'(0) = 2\,f'(1)$.
   (d) $g'(1) = 2\,f'(0)$.

4. Seja $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para cada $x>2$,

$$\exists c \in \,]2,x[\, : f(x) = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x-2) + \frac{2c^2-4c+1}{e^{(c-1)^2}}(x-2)^2.$$

Qual o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - \frac{1}{e} + \frac{2}{e}(x-2) - \frac{2}{e}(x-2)^2}{(x-2)^2}$?

(a) $\frac{1}{e}$.

(b) $-\frac{1}{e}$.

(c) $\frac{2c^2-4c+1}{e^{(c-1)^2}} - \frac{2}{e}$.

(d) $\frac{2}{e}$.

5. Se $M = \displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\cos(x)\big)^{1/x^2}$ e $L = \displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^4-2x^3+x^2-2x}{x^2-4}$ então

(a) $M = -\frac{1}{2}$ e $L = \frac{5}{2}$.

(b) $M = \frac{1}{\sqrt{e}}$ e $L = 1$.

(c) $M = -\frac{1}{2}$ e $L = 1$.

(d) $M = \frac{1}{\sqrt{e}}$ e $L = \frac{5}{2}$.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[3.0 val.]** Determine constantes reais a, b e c tais que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - (ax^2+bx+c-1)}{x^2} = 1.$$

2. **[2.5 val.]** Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \operatorname{sen}(x)$. Escreva a Fórmula de Taylor de f com resto de Lagrange de ordem 3 em torno do ponto $a = \frac{\pi}{2}$.

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{|1-x|}, & \text{se } x \geq 0 \\ x - \operatorname{sen}(x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   (a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.

   (b) **[2.0 val.]** Caracterize a função derivada de f.

   (c) **[2.5 val.]** Estude a monotonia e extremos de f.

   (d) **[2.5 val.]** Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}_0^-$.

4. **[2.0 val.]** Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0)=f(1)=0$. Prove que existe $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x+\frac{1}{2}\right)$.