

Análise Matemática I

Repetição do 2º Teste — 27 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

- Seja $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $H(n) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Qual das seguintes afirmações é correcta para a equação $H'(x) = 0$?
 - Não tem soluções.
 - Tem infinitas soluções.
 - Tem duas soluções.
 - Tem mais de duas soluções, mas em número finito.
- Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = -1$ e $f(1) = 3$. Seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \frac{1}{1 + |f(x)|}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
 - g pode não ter mínimo em $[0, 1]$.
 - O mínimo de g em $[0, 1]$ é 0.
 - O máximo de g em $[0, 1]$ é 1.
 - g pode não ter máximo em $[0, 1]$.
- Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f(0) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(\arctg(x - x^2)) + \arctg(f(x))$. Então
 - $2g'(1) + g'(0) = 2f'(1)$.
 - $g'(1) = 2g'(0)$.
 - $g'(0) = f'(1) + f'(0)$.
 - $g'(1) = 2f'(0)$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que, para cada $x > 2$,

$$\exists c \in]2, x[: f(x) = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x-2) + \frac{2c^2 - 4c + 1}{e^{(c-1)^2}}(x-2)^2.$$

Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \frac{1}{e} + \frac{2}{e}(x-2) - \frac{2}{e}(x-2)^2}{(x-2)^2}$?

(a) $\frac{2c^2 - 4c + 1}{e^{(c-1)^2}} - \frac{2}{e}.$

(c) $\frac{2}{e}.$

(b) $\frac{1}{e}.$

(d) $-\frac{1}{e}.$

5. Se $M = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2}$ e $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ então

(a) $M = -\frac{1}{2}$ e $L = \frac{5}{2}.$

(c) $M = \frac{1}{\sqrt{e}}$ e $L = \frac{5}{2}.$

(b) $M = \frac{1}{\sqrt{e}}$ e $L = 1.$

(d) $M = -\frac{1}{2}$ e $L = 1.$

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. [3.0 val.] Determine constantes reais a , b e c tais que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - (ax^2 + bx + c - 1)}{x^2} = 1.$$

2. [2.5 val.] Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \sin(x)$. Escreva a Fórmula de Taylor de f com resto de Lagrange de ordem 3 em torno do ponto $a = \frac{\pi}{2}$.

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{|1-x|}, & \text{se } x \geq 0 \\ x - \sin(x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) [0.5 val.] Determine o domínio de f .

(b) [2.0 val.] Caracterize a função derivada de f .

(c) [2.5 val.] Estude a monotonia e extremos de f .

(d) [2.5 val.] Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em \mathbb{R}_0^- .

4. [2.0 val.] Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(1) = 0$. Prove que existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.