FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Grelha de Correcção do Enunciado B

Análise Matemática I

Repetição do 2º Teste — 27 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $H(n) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Qual das seguintes afirmações é correcta para a equação $H'(x) = 0$?

   (a) Não tem soluções.
   $\boxed{\text{(b)}}$ Tem infinitas soluções.
   (c) Tem duas soluções.
   (d) Tem mais de duas soluções, mas em número finito.

2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = -1$ e $f(1) = 3$. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \dfrac{1}{1 + |f(x)|}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (a) g pode não ter mínimo em $[0,1]$.
   (b) O mínimo de g em $[0,1]$ é 0.
   $\boxed{\text{(c)}}$ O máximo de g em $[0,1]$ é 1.
   (d) g pode não ter máximo em $[0,1]$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f(0) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f\big(\operatorname{arctg}(x - x^2)\big) + \operatorname{arctg}\big(f(x)\big)$. Então

   $\boxed{\text{(a)}}$ $2\,g'(1) + g'(0) = 2\,f'(1)$.
   (b) $g'(1) = 2\,g'(0)$.
   (c) $g'(0) = f'(1) + f'(0)$.
   (d) $g'(1) = 2\,f'(0)$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para cada $x > 2$,

$$\exists c \in]2, x[\, : f(x) = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x-2) + \frac{2c^2 - 4c + 1}{e^{(c-1)^2}}(x-2)^2.$$

Qual o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - \frac{1}{e} + \frac{2}{e}(x-2) - \frac{2}{e}(x-2)^2}{(x-2)^2}$?

(a) $\dfrac{2c^2-4c+1}{e^{(c-1)^2}} - \dfrac{2}{e}$.

(b) $\dfrac{1}{e}$.

(c) $\dfrac{2}{e}$.

$\boxed{\text{(d)}}$ $-\dfrac{1}{e}$.

5. Se $M = \displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\cos(x)\big)^{1/x^2}$ e $L = \displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ então

(a) $M = -\dfrac{1}{2}$ e $L = \dfrac{5}{2}$.

(b) $M = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ e $L = 1$.

$\boxed{\text{(c)}}$ $M = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ e $L = \dfrac{5}{2}$.

(d) $M = -\dfrac{1}{2}$ e $L = 1$.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[3.0 val.]** Determine constantes reais a, b e c tais que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - (ax^2 + bx + c - 1)}{x^2} = 1.$$

Resposta: Sejam $f(x) = x\cos(x) - (ax^2 + bx + c - 1)$ e $g(x) = x^2$. Aplicando a álgebra dos limites a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - (ax^2 + bx + c - 1)}{x^2}$$

verificamos que se $1 - c = 0$ obtemos uma indeterminação $\dfrac{0}{0}$ e que se $1 - c \neq 0$ obtemos ∞ para resultado do limite. Como pretendemos obter um limite finito temos de admitir que $c = 1$.

As funções f e g são diferenciáveis em $I =]-1, 1[$, a primeira por ser a diferença entre o produto do coseno por uma função polinomial e uma função polinomial, e a segunda por ser polinomial. Temos

$$f'(x) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x) - 2ax - b$$

e, além disso, $g'(x) = 2x \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{0\}$. Se existir

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

estamos nas condições da Regra de Cauchy para calcular o limite pretendido.

Mas ao calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x) - 2ax - b}{2x}$$

verificamos que se $b = 1$ obtemos novamente uma indeterminação $\frac{0}{0}$ e que se $b \neq 1$ obtemos ∞ para resultado do limite. Como pretendemos obter um limite finito temos de admitir que $b = 1$.

As funções f' e g' são diferenciáveis em I, tendo-se

$$f''(x) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x) - 2a$$

e $g''(x) = 2 \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{0\}$. Se existir

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

estamos nas condições da Regra de Cauchy para calcular o limite pretendido. Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x) - 2a}{2} = -a$$

Como queremos que o valor deste limite seja 1 basta fazer $-a = 1$, isto é, $a = -1$.

2. **[2.5 val.]** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x\,\mathrm{sen}(x)$. Escreva a Fórmula de Taylor de f com resto de Lagrange de ordem 3 em torno do ponto $a = \frac{\pi}{2}$.

Resposta: Como f é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ podemos escrever a sua fórmula de Taylor de qualquer ordem na vizinhança de qualquer ponto. Em particular, para $n = 3$ e $a = \frac{\pi}{2}$, existe c entre $\frac{\pi}{2}$ e x tal que

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + f'''(c)\,\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}.$$

Calculemos as derivadas de f.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x\,\mathrm{sen}(x) + e^x\cos(x) \\
&= e^x\big(\mathrm{sen}(x) + \cos(x)\big) && \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \\
f''(x) &= e^x\big(\mathrm{sen}(x) + \cos(x)\big) + e^x\big(\cos(x) - \mathrm{sen}(x)\big) \\
&= 2\,e^x\cos(x) && \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
f'''(x) &= 2\,e^x\cos(x) - 2\,e^x\mathrm{sen}(x) \\
&= 2\,e^x\big(\cos(x) - \mathrm{sen}(x)\big)
\end{aligned}$$

Calculando f''' em $x = c$ obtemos $f'''(c) = 2\,e^c\big(\cos(c) - \mathrm{sen}(c)\big)$.
Logo,

$$\begin{aligned}
e^x\,\mathrm{sen}(x) &= e^{\pi/2} + e^{\pi/2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\,e^c\big(\cos(c) - \mathrm{sen}(c)\big)\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} \\
&= e^{\pi/2} + e^{\pi/2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3},e^c\big(\cos(c) - \mathrm{sen}(c)\big)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3
\end{aligned}$$

com c entre $\frac{\pi}{2}$ e x.

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{|1-x|}, & \text{se } x \geq 0 \\ x - \operatorname{sen}(x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.

(b) **[2.0 val.]** Caracterize a função derivada de f.

(c) **[2.5 val.]** Estude a monotonia e extremos de f.

(d) **[2.5 val.]** Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}_0^-$.

Resposta: (a)

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = \mathbb{R}.$$

(b) Seja $x < 0$. A função f é contínua neste conjunto por ser a diferença entre uma função polinomial e a função seno ambas contínuas em $\mathbb{R}$.

Seja $x > 0$. Sejam $g_1(x) = 1 - x$ e $g_2(x) = e^x$. Neste conjunto g_1 é contínua por ser uma função polinomial, portanto, $|g_1|$ é contínua se $x > 0$. Como a função exponencial é contínua em $\mathbb{R}$ e a composição de funções contínuas é contínua, podemos afirmar que $g_2 \circ |g_1|$ é contínua se $x > 0$. Concluímos que f é contínua em $x > 0$.

Estudemos a continuidade em $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{|1-x|} = e;$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \big(x - \operatorname{sen}(x)\big) = 0.$$

Como os limites laterais são diferentes não existe limite em $x = 0$, portanto, f não é contínua nesse ponto.

(c) Para calcular a derivada de f comecemos por reescrever a função:

$$f(x) = \begin{cases} x - \operatorname{sen}(x), & \text{se } x < 0 \\ e^{1-x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{x-1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ a derivada de f é

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x), & \text{se } x < 0 \\ -e^{1-x}, & \text{se } 0 < x < 1 \\ e^{x-1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Não existe derivada em $x = 0$ porque f é descontínua nesse ponto. Estudemos a derivada em $x = 1$:

$$f'_e(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{1-x} - 1}{x - 1} = -\lim_{x \to 1^-} \frac{e^{1-x} - 1}{1 - x} = -1,$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = 1,$$

portanto, não existe $f'(1)$. A função f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(d) Se $x < 0$ temos

$$f''(x) = -\operatorname{sen}(x),$$

portanto,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^-.$$

Como

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

temos

$$f'''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0.$$

Como a primeira derivada que não se anula em $x = k\pi$ é de ordem ímpar podemos afirmar, pelo Teorema de Taylor, que o gráfico de f tem pontos de inflexão em $\big(k\pi, f(k\pi)\big) = (k\pi, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}^-$.

4. **[2.0 val.]** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(1) = 0$. Prove que existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Resposta: Consideremos a função $h : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$. A função h é contínua em $[0,1]$ por ser a diferença entre duas funções contínuas: f e a composição de f com uma função polinomial. Pretendemos provar que existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $h(x) = 0$. Temos

$$h(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right)$$

e

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Se $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ fica provado o pretendido visto que $h(0) = 0$. Se $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ então

$$h(0) \cdot h\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0,$$

portanto, pelo Teorema de Bolzano, existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $h(x) = 0$.