FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado B

Análise Matemática I

Repetição do 3º Teste — 27 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\left(\arccos(x)\right)^3}$. Então $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} f(x)\,dx$ é igual a:

(a) $-\dfrac{10}{\pi^2}$. (b) $\dfrac{7}{\pi^2}$. (c) $-\dfrac{20}{\pi^2}$. (d) $\dfrac{7}{2\pi^2}$.

---

2. Seja $f(x)$ a solução do problema

$$f'(x) = x\,\mathrm{sen}(x^2), \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -1.$$

O valor de $f(x)$ no ponto $x = -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ é

(a) -2. (b) -1. (c) 1. (d) -4.

---

3. Considere a seguinte decomposição em fracções simples

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{Dx+E}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

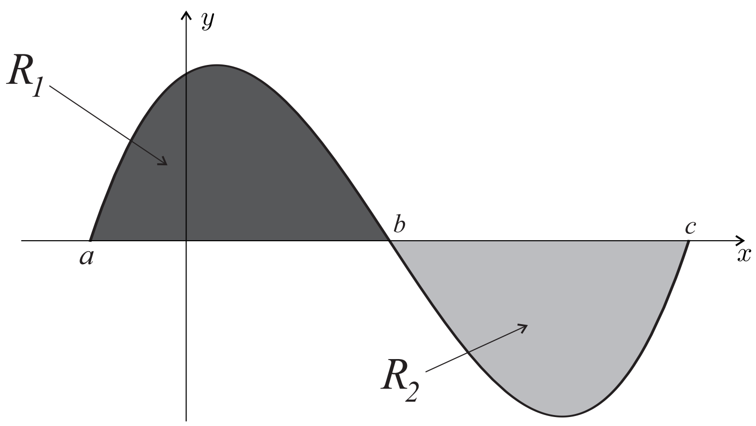
onde A, B, C, D e E são constantes reais. Seja g uma função polinomial de grau menor ou igual a 4. A função racional a que pode corresponder a decomposição anterior é:

(a) $\dfrac{g(x)}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-x+1)}$. (c) $\dfrac{g(x)}{(x^3+6x^2+9x)(x^2+x+1)}$.

(b) $\dfrac{g(x)}{(x^2+3x)(x^2-x+1)}$. (d) $\dfrac{g(x)}{(x^3-6x^2+9x)(x^2+x+1)}$.

---

4. O eixo das abcissas e o gráfico da função $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ dividem o plano em duas regiões, R_1 e R_2, indicadas na figura.



Seja A_1 a área da região R_1 e A_2 a área da região R_2. Então

$$2\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

é igual a:

(a) $2A_1 + A_2$. (b) $2A_1 + 3A_2$. (c) $2A_1 - A_2$. (d) $2A_1 + 2A_2$.

---

5. Seja $f(x) = \displaystyle\int_{k\log(x)}^{3x} e^{-t}\,dt$, com $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, tal que $f'(1) = \dfrac{6}{e^3}$. Considere as afirmações seguintes:

I. $f'(x) = \dfrac{3}{e^{3x}} - kx^{-1-k}$;

II. O valor de k é 0;

III. $f'(x) = -\dfrac{3}{e^{3x}} + kx^{-1-k}$;

IV. O valor de k é $-\dfrac{3}{e^3}$.

A lista completa das afirmações correctas é:

(a) III e IV.

(b) I e IV.

(c) IV.

(d) II e IV.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[2,0 val.]** Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_1^4 \sqrt{x}\log(x)\,dx.$$

2. Considere o integral

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2 + \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\big(2 - \operatorname{sen}^2(x)\big)}\,dx.$$

(a) **[2.0 val.]** Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2+\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\big(2-\operatorname{sen}^2(x)\big)}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2+t+2}{t^2(t^2+2)}\,dt.$$

(b) **[2.5 val.]** Calcule o valor do integral.

3. **[2.5 val.]** Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x)=\operatorname{sen}(2x) \quad \text{e} \quad g(x)=\cos(x)$$

no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Considere a função F, real de variável real, definida por

$$F(x)=\int_2^{2x-3} \frac{e^t}{\log(t^2)}\,dt.$$

(a) **[2,0 val.]** Determine o domínio de F. Justifique a sua resposta.

(b) **[1,5 val.]** Calcule a derivada de F. Justifique a sua resposta.

5. **[2.5 val.]** Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$$

Expressão	Substituição
$f(x)=R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x=t^\mu, \quad \mu=\text{m.m.c.}\{n,q,\ldots,s\}$
$f(x)=R(x,\sqrt{a\,x^2+b\,x+c})$	$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=\sqrt{a}\,x+t$, se $a>0$ $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=t\,x+\sqrt{c}$, se $c>0$
$f(x)=R(\operatorname{sen}(x),\cos(x))$	$\operatorname{tg}(\frac{x}{2})=t$
$f(x)=R(\operatorname{sen}(x),\cos(x))$ $R(-\operatorname{sen}(x),-\cos(x))=R(\operatorname{sen}(x),\cos(x))$	$\operatorname{tg}(x)=t$
$f(x)=R(e^x)$	$e^x=t$
$f(x)=\frac{1}{x}\cdot R(\log(x))$	$\log(x)=t$