FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Grelha de Correcção do Enunciado B

Análise Matemática I

Repetição do 3º Teste — 27 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(\arccos(x))^3}$. Então $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} f(x)\,dx$ é igual a:

(a) $-\dfrac{10}{\pi^2}$. (b) $\dfrac{7}{\pi^2}$. (c) $-\dfrac{20}{\pi^2}$. $\boxed{\text{(d)}}$ $\dfrac{7}{2\pi^2}$.

---

2. Seja $f(x)$ a solução do problema

$$f'(x) = x\,\mathrm{sen}(x^2), \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -1.$$

O valor de $f(x)$ no ponto $x = -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ é

(a) -2. $\boxed{\text{(b)}}$ -1. (c) 1. (d) -4.

---

3. Considere a seguinte decomposição em fracções simples

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{Dx+E}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}},$$

onde A, B, C, D e E são constantes reais. Seja g uma função polinomial de grau menor ou igual a 4. A função racional a que pode corresponder a decomposição anterior é:

$\boxed{\text{(a)}}$ $\dfrac{g(x)}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-x+1)}$.

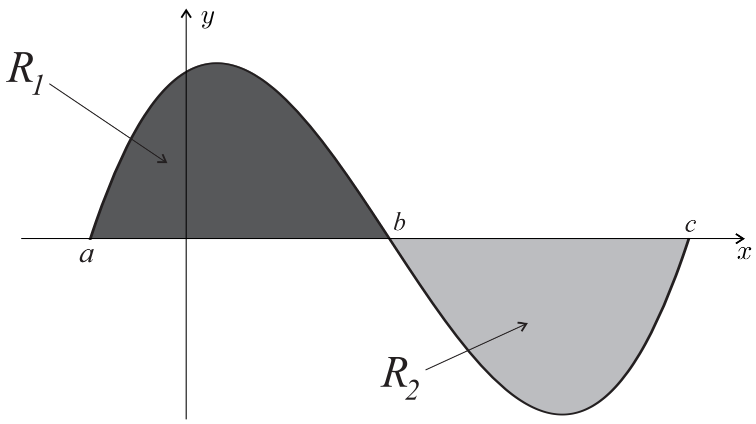
(b) $\dfrac{g(x)}{(x^2+3x)(x^2-x+1)}$.

(c) $\dfrac{g(x)}{(x^3+6x^2+9x)(x^2+x+1)}$.

(d) $\dfrac{g(x)}{(x^3-6x^2+9x)(x^2+x+1)}$.

---

4. O eixo das abcissas e o gráfico da função $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ dividem o plano em duas regiões, R_1 e R_2, indicadas na figura.



Seja A_1 a área da região R_1 e A_2 a área da região R_2. Então

$$2\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

é igual a:

(a) $2A_1 + A_2$. (b) $2A_1 + 3A_2$. $\boxed{\text{(c)}}$ $2A_1 - A_2$. (d) $2A_1 + 2A_2$.

---

5. Seja $f(x) = \displaystyle\int_{k\log(x)}^{3x} e^{-t}\,dt$, com $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, tal que $f'(1) = \dfrac{6}{e^3}$. Considere as afirmações seguintes:

I. $f'(x) = \dfrac{3}{e^{3x}} - kx^{-1-k}$;

II. O valor de k é 0;

III. $f'(x) = -\dfrac{3}{e^{3x}} + kx^{-1-k}$;

IV. O valor de k é $-\dfrac{3}{e^3}$.

A lista completa das afirmações correctas é:

(a) III e IV.

$\boxed{\text{(b)}}$ I e IV.

(c) IV.

(d) II e IV.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[2.0 val.]** Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_1^4 \sqrt{x}\log(x)\,dx.$$

Resposta: Seja $h(x) = \sqrt{x}\log(x)$. Consideremos $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \log(x)$. Uma primitiva de f é $F(x) = \dfrac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \dfrac{2}{3} \cdot x^{3/2}$ e $g'(x) = \dfrac{1}{x}$, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \sqrt{x} \log(x)\, dx &= \left[\frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \log(x)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} \log(4) - \int_1^4 \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x}\, dx \\
&= \frac{16}{3} \log(4) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3} \cdot x^{3/2}\right]_1^4 \\
&= \frac{16}{3} \log(4) - \frac{4}{9}\left(4^{3/2} - 1\right) = \frac{16}{3} \log(4) - \frac{28}{9}.
\end{aligned}$$

2. Considere o integral

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2 + \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\big(2 - \operatorname{sen}^2(x)\big)}\, dx.$$

   (a) **[2.0 val.]** Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2 + \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\big(2 - \operatorname{sen}^2(x)\big)}\, dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2 + t + 2}{t^2(t^2+2)}\, dt.$$

   (b) **[2.5 val.]** Calcule o valor do integral.

Resposta: (a) A substituição indicada é $\operatorname{tg}(x) = t = \varphi^{-1}(x)$ o que implica que

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Além disso, $x = \varphi(t) = \operatorname{arctg}(t)$ e $\varphi'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Utilizando as fórmulas trigonométricas obtemos $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ e $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2 + \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\big(2 - \operatorname{sen}^2(x)\big)}\, dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2 + \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 \left(2 - \left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2\right)} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2 + \dfrac{t}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2}\left(2 - \dfrac{t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\dfrac{2t^2+t+2}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2} \cdot \dfrac{2+t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2 + t + 2}{t^2(2+t^2)}\, dt.$$

(b) O polinómio $t^2(t^2+2)$ tem uma raiz real com multiplicidade 2 e um par de raízes complexas com multiplicidade 1. Então

$$\begin{aligned}\frac{2t^2+t+2}{t^2(2+t^2)} &= \frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{Ct+D}{t^2+2}\\ &= \frac{A(t^2+2)+Bt(t^2+2)+(Ct+D)t^2}{t^2(t^2+2)}\\ &= \frac{(B+C)t^3+(A+D)t^2+2Bt+2A}{t^2(t^2+2)}.\end{aligned}$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados temos

$$\begin{cases} B+C=0\\ A+D=2\\ 2B \quad =1\\ 2A \quad =2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1\\ B=\dfrac{1}{2}\\ C=-\dfrac{1}{2}\\ D=1,\end{cases}$$

portanto,

$$\frac{2t^2+t+2}{t^2(2+t^2)} = \frac{1}{t^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{-\frac{1}{2}t+1}{t^2+2}$$

e

$$\begin{aligned}&\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{2+\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\big(2-\operatorname{sen}^2(x)\big)}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{2t^2+t+2}{t^2(t^2+2)}\,dt\\
&= \int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2}\,dt+\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{t}\,dt-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{-\frac{1}{2}t+1}{t^2+2}\,dt\\
&= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\Big[\log|t|\Big]_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t}{t^2+2}\,dt+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+2}\,dt\\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}+1+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}\Big[\log(t^2+2)\Big]_1^{\sqrt{3}}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt\\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}+1+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}\log(5)+\frac{1}{4}\log(3)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_1^{\sqrt{3}}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}+1+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{3}\right)+\frac{1}{4}\log\left(\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}+1+\frac{1}{4}\log\left(\frac{9}{5}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

3. **[2.5 val.]** Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x)=\operatorname{sen}(2x) \quad \text{e} \quad g(x)=\cos(x)$$

no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Resposta: Comecemos por determinar os pontos de intersecção dos gráficos das funções. As abcissas desses pontos são obtidas resolvendo a equação $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x) = \cos(x) &\Leftrightarrow \cos(x)\big(2\operatorname{sen}(x) - 1\big) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \vee \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ os gráficos das funções intersectam-se nos pontos de abcissas $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$. Como $g(0) = 1$, $f(0) = 0$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ podemos afirmar que $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$, e $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. A área pedida é dada por

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \big(\cos(x) - \operatorname{sen}(2x)\big)\, dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \big(\operatorname{sen}(2x) - \cos(x)\big)\, dx \\ &= \left[\operatorname{sen}(x) + \frac{\cos(2x)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/6} + \left[-\frac{\cos(2x)}{2} - \operatorname{sen}(x)\right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos(-\pi)}{2} - \frac{\cos(\pi)}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

4. Considere a função F, real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_2^{2x-3} \frac{e^t}{\log(t^2)}\, dt.$$

(a) **[2,0 val.]** Determine o domínio de F. Justifique a sua resposta.

(b) **[1,5 val.]** Calcule a derivada de F. Justifique a sua resposta.

Resposta: (a) A função F é a composição de $h(x) = 2x - 3$ com $G(y) = \int_2^y \frac{e^t}{\log(t^2)}\, dt$, isto é, podemos escrever $F(x) = G(h(x))$. Designemos por A o domínio de h e por B o domínio de G. O domínio, D, de F é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \wedge h(x) \in B\}.$$

Temos $A = \mathbb{R}$. Para determinar B começamos por calcular o domínio, C, da função integranda $g(x) = \frac{e^x}{\log(x^2)}$.

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \wedge \log(x^2) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x^2 \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}. \end{aligned}$$

Para que o intervalo de extremos 2 e y esteja contido em C é necessário e suficiente que $y > 1$. Podemos concluir que $B =]1, +\infty[$. Então

$$D = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \in]1, +\infty[\ \} = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 3 > 1\} =]2, +\infty[\,.$$

(b) A função g é contínua em C, portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral G é diferenciável em $]1,+\infty[$ e

$$G'(x) = g(x) = \frac{e^x}{\log(x^2)}.$$

Como h é diferenciável em $\mathbb{R}$ podemos afirmar, pelo teorema da derivação da função composta, que F é diferenciável em $]2,+\infty[$ e

$$F'(x) = G'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{e^{2x-3}}{\log((2x-3)^2)} \cdot 2 = \frac{2e^{2x-3}}{\log((2x-3)^2)}, \ \forall x \in \ ]2,+\infty[\,.$$

5. **[2.5 val.]** Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$$

Resposta: A função integranda tem domínio D,

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - e^{2x} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = \,]-\infty, 0[$$

e é contínua nesse conjunto. O intervalo de integração é ilimitado e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = +\infty$, portanto, o integral é impróprio misto. Podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$$

O integral dado é convergente, se e só se, os dois integrais do segundo membro da igualdade forem convergentes. Por definição

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty} \Big[\operatorname{arcsen}(e^x)\Big]_t^{-1} = \lim_{t\to-\infty} \big(\operatorname{arcsen}(e^{-1}) - \operatorname{arcsen}(e^t)\big) \\
&= \operatorname{arcsen}(e^{-1}) - \operatorname{arcsen}(0) = \operatorname{arcsen}(e^{-1})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx \\
&= \lim_{t\to 0^-} \Big[\operatorname{arcsen}(e^x)\Big]_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0^-} \big(\operatorname{arcsen}(e^t) - \operatorname{arcsen}(e^{-1})\big) \\
&= \operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(e^{-1}) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(e^{-1}),
\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$