

Análise Matemática I

1º Teste — 5 de Abril de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

Considere o conjunto $C = A \cup B$ onde $A = \left[\frac{1}{100}, 10 \right]$ e B é o conjunto dos termos da sucessão (a_n) definida por

$$a_n = \begin{cases} -n, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

1. Qual o interior e a fronteira de C ?

- (a) $\text{int}(C) =]\frac{1}{99}, 10[$ e $\text{fr}(C) = \{0, \frac{1}{100}, 10\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 49\}$.
- (b) $\text{int}(C) =]\frac{1}{100}, 10[$ e $\text{fr}(C) = \{0, \frac{1}{100}, 10\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$.
- (c) $\text{int}(C) =]\frac{1}{100}, 10[$ e $\text{fr}(C) = \{0, \frac{1}{100}, 10\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 101\}$.
- (d) $\text{int}(C) =]\frac{1}{100}, 10[$ e $\text{fr}(C) = \{0, \frac{1}{100}, 10\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 99\}$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) $\sup(C) = 10$ e $\inf(B) = 0$.
- (b) $\max(C) = 10$ e B não é minorado.
- (c) $\lim a_n = -\infty$ e $\overline{\lim} a_n = 0$.
- (d) $\inf(C) = \frac{1}{99}$ e $\sup(B) = 1$.

3. O conjunto S dos pontos isolados e o derivado de C são

- (a) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$ e $C' = \overline{A} \cup \{0\}$.
- (b) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$ e $C' = A \cup \{0\}$.
- (c) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 49\}$ e $C' = \overline{A} \cup \{0\}$.
- (d) $S = B \setminus \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \leq 51\}$ e $C' = A \cup \{0\}$.

4. Seja D o domínio da função real de variável real, f , definida por $f(x) = \frac{\log(2x-1)^2}{\arccos(x^2-3)}$. Qual a fronteira de D ?
- (a) $\{-2, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2\}$. (c) $\{\sqrt{2}, 2\}$.
 (b) $\{-2, \frac{1}{2}, 2\}$. (d) $\{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$.
5. Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado e (x_n) uma sucessão de Cauchy de elementos de D . Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
- (a) A sucessão (x_n) não tem subsucessões convergentes. (c) O conjunto dos sublimites de (x_n) é um conjunto singular.
 (b) A sucessão (x_n) é monótona e limitada. (d) O limite de (x_n) pertence a D .

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. [2.5 val.] Utilizando o Princípio de Indução Matemática prove que

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

2. Calcule, se existir, o valor dos seguintes limites:

(a) [1.5 val.] $\lim \left(\frac{2^n + 3}{4^n + 1} \right)^{4^n} \cdot \cos(4^n + \pi);$

(b) [2.0 val.] $\lim \sum_{k=2}^{2n+3} \frac{\arctg(e^n)}{4 + \sqrt{5n^2 + k}};$

(c) [2.0 val.] $\lim \sqrt[n]{\frac{n^5}{n! + 1}}.$

3. Considere a sucessão (u_n) definida por $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = 1 + (u_n - 1)u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

- (a) [1.5 val.] Admitindo que $u_n \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}$, prove que a sucessão é estritamente monótona.
 (b) [1.5 val.] Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2(\sin(x) + 1)}, & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ \arctg(e^{x-\pi/2}), & \text{se } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- (a) [0.5 val.] Determine o domínio de f .
 (b) [1.0 val.] Estude a continuidade de f no seu domínio.
 (c) [1.0 val.] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 (d) [1.5 val.] Averigúe se é possível prolongar f por continuidade a cada um dos pontos $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Justifique.