FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado B

Análise Matemática I

1º Teste — 5 de Abril de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

Considere o conjunto $C = A \cup B$ onde $A = \left[\frac{1}{100}, 10\right[$ e B é o conjunto dos termos da sucessão (a_n) definida por

$$a_n = \begin{cases} -n, & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

1. Qual o interior e a fronteira de C?

   (a) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{99}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 49\}$.

   (b) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{100}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 101\}$.

   (c) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{100}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$.

   (d) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{100}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 99\}$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (a) $\sup(C) = 10$ e $\inf(B) = 0$.

   (b) $\max(C) = 10$ e B não é minorado.

   (c) $\inf(C) = \dfrac{1}{99}$ e $\sup(B) = 1$.

   (d) $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$ e $\overline{\lim}\, a_n = 0$.

3. O conjunto S dos pontos isolados e o derivado de C são

   (a) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$ e $C' = A \cup \{0\}$.

   (b) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$ e $C' = \overline{A} \cup \{0\}$.

   (c) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 49\}$ e $C' = \overline{A} \cup \{0\}$.

   (d) $S = B \setminus \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \leq 51\}$ e $C' = A \cup \{0\}$.

4. Seja D o domínio da função real de variável real, f, definida por $f(x) = \dfrac{\log(2x-1)^2}{\arccos(x^2-3)}$. Qual a fronteira de D?

(a) $\{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$.

(b) $\{-2, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2\}$.

(c) $\{-2, \frac{1}{2}, 2\}$.

(d) $\{\sqrt{2}, 2\}$.

5. Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado e (x_n) uma sucessão de Cauchy de elementos de D. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) A sucessão (x_n) não tem subsucessões convergentes.

(b) O conjunto dos sublimites de (x_n) é um conjunto singular.

(c) A sucessão (x_n) é monótona e limitada.

(d) O limite de (x_n) pertence a D.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[2.5 val.]** Utilizando o Princípio de Indução Matemática prove que

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

2. Calcule, se existir, o valor dos seguintes limites:

(a) **[1.5 val.]** $\lim \left(\dfrac{2^n+3}{4^n+1}\right)^{4^n} \cdot \cos(4^n+\pi)$;

(b) **[2.0 val.]** $\lim \displaystyle\sum_{k=2}^{2n+3} \frac{\operatorname{arctg}(e^n)}{4+\sqrt{5n^2+k}}$;

(c) **[2.0 val.]** $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{n!+1}}$.

3. Considere a sucessão (u_n) definida por $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = 1 + (u_n - 1)\, u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(a) **[1.5 val.]** Admitindo que $u_n \in \,]0,1[, \, \forall n \in \mathbb{N}$, prove que a sucessão é estritamente monótona.

(b) **[1.5 val.]** Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\big(\operatorname{sen}(x)+1\big)}, & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{arctg}\left(e^{x-\pi/2}\right), & \text{se } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.

(b) **[1.0 val.]** Estude a continuidade de f no seu domínio.

(c) **[1.0 val.]** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(d) **[1.5 val.]** Averigúe se é possível prolongar f por continuidade a cada um dos pontos $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$. Justifique.