FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Grelha de Correcção do Enunciado B

Análise Matemática I

2º Teste – 10 de Maio de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x - \operatorname{sen}(x) + e^x$. Considere as seguintes afirmações:

   I. A equação $f(x) = x$ tem uma solução no intervalo $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$;

   II. O contradomínio de qualquer restrição de f a um intervalo fechado é um intervalo limitado;

   III. A função f tem máximo e mínimo absolutos no intervalo $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$;

   IV. O contradomínio de qualquer restrição de f a um intervalo fechado limitado é um intervalo fechado limitado.

   A **lista completa** das afirmações correctas é:

   (a) I, II e III.
   (b) I, III e IV.
   (c) III e IV.
   (d) I e III.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 2\operatorname{sen}(x)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
   (a) A equação $f(x) = 0$ tem infinitas soluções.
   (b) A equação $f(x) = 0$ não tem soluções.
   (c) A equação $f(x) = 0$ tem exactamente três soluções.
   (d) A equação $f(x) = 0$ tem exactamente uma solução.

3. Sejam f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e h a função definida por $h(x) = f\left(\operatorname{sen}\left(\log(x)\right)\right)$. Se $f'(0) = 2$ qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (a) $h'(1) = 2$
   (b) h é crescente em $\mathbb{R}$.
   (c) $x = e^{\pi}$ é ponto de estacionaridade de h.
   (d) $h(1)$ é máximo local de h.

4. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que para cada $x > 0$

$$\exists c \in]0, x[: f(x) = \log(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{1 - e^c}{(1 + e^c)^3} \cdot \frac{x^3}{6}.$$

Qual o valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - \log(2) - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{3}}{x^3}$?

(a) $\dfrac{1 - e^c}{6(1 + e^c)^3} - \dfrac{1}{3}$.

(b) $-\dfrac{1}{3}$.

(c) 0.

(d) $\dfrac{1}{3}$.

5. Sejam F e G duas funções contínuas em $[0, 2]$, diferenciáveis em $]0, 2[$ tais que $F(x) - G(x) = k$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $G'(x) \neq 0$, $\forall x \in]0, 2[$. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(a) $\exists c \in]0, 2[: F'(c) = G'(c) = 0$.

(b) $\exists c \in]0, 2[: F(c) = G(c)$.

(c) $\exists c \in]0, 2[: \dfrac{F(c)}{G(c)} = \dfrac{F(2) - F(0)}{G(2) - G(0)}$.

(d) $\exists c \in]0, 2[: \dfrac{F'(c)}{G'(c)} = \dfrac{F(2) - F(0)}{G(2) - G(0)}$.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[3.0 val.]** Determine constantes reais a e b tais que $\lim_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1} \log(x) - (ax + b)}{(x - 1)^2} = \dfrac{1}{2}$.

Resposta: Sejam $f(x) = e^{x-1} \log(x) - (ax + b)$ e $g(x) = (x - 1)^2$. Aplicando a álgebra dos limites a

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} \log(x) - (ax + b)}{(x - 1)^2}$$

verificamos que se $a + b = 0$ obtemos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ e que se $a + b \neq 0$ obtemos ∞ para resultado do limite. Como pretendemos obter um limite finito temos de admitir que $a + b = 0$.

As funções f e g são diferenciáveis em $I =]0, 2[$, a primeira por ser a soma de uma função polinomial com o produto da composição da função exponencial com uma função polinomial pela função logarítmica, e a segunda por ser polinomial. Temos

$$f'(x) = e^{x-1} \log(x) + \frac{e^{x-1}}{x} - a$$

e, além disso, $g'(x) = 2(x - 1) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{1\}$. Se existir

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

estamos nas condições da Regra de Cauchy para calcular o limite pretendido.

Mas ao calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} \log(x) + \dfrac{e^{x-1}}{x} - a}{2(x - 1)}$$

verificamos que se $1-a=0$ obtemos novamente uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e que se $1-a\neq 0$ obtemos ∞ para resultado do limite. Como pretendemos obter um limite finito temos de admitir que $a=1$.

As funções f' e g' são diferenciáveis em I, tendo-se

$$f''(x)=e^{x-1}\log(x)+\frac{e^{x-1}}{x}+\frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}$$

e $g''(x)=2\neq 0$, $\forall x\in I$. Se existir

$$\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

estamos nas condições da Regra de Cauchy para calcular o limite pretendido. Como

$$\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}\log(x)+\frac{e^{x-1}}{x}+\frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}}{2}=\frac{1}{2}$$

O valor do limite é $\frac{1}{2}$ se $a=1$ e $b=-1$

2. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\log(e^x+1)$.

   (a) **[1.5 val.]** Escreva a Fórmula de MacLaurin de f com resto de Lagrange de ordem 3.

   (b) **[2.0 val.]** Utilizando a alínea anterior prove que

$$f(x)\leq \log(2)+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Resposta: (a) A função f é de classe C^∞ no seu domínio $D=\mathbb{R}$. Pelo Teorema de Taylor, existe c, entre x e 0, tal que

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+f''(0)\,\frac{x^2}{2!}+f'''(c)\,\frac{x^3}{3!}.$$

Calculemos as três primeiras derivadas de f:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\log(e^x+1))'=\frac{e^x}{e^x+1},\\
f''(x) &= \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}.\\
f'''(x) &= \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)^2-2(e^x+1)e^xe^x}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)-2e^xe^x}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.
\end{aligned}$$

Obtemos $f(0)=\log(2)$, $f'(0)=\frac{1}{2}$, $f''(0)=\frac{1}{4}$ e $f'''(c)=\frac{e^c(1-e^c)}{(e^c+1)^3}$.
A fórmula de Taylor de f é

$$f(x)=\log(2)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{e^c(1-e^c)}{(e^c+1)^3}\cdot\frac{x^3}{3!}$$

com $0<c<x\vee x<c<0$.

(b) Pela alínea anterior temos que para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe c entre 0 e x tal que

$$f(x) = \log(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{e^c(1-e^c)}{(e^c+1)^3} \cdot \frac{x^3}{3!}.$$

Se $x > 0$ então $1 - e^c < 0$ o que implica que $\dfrac{e^c(1-e^c)}{(e^c+1)^3} \cdot \dfrac{x^3}{3!} < 0$. Se $x < 0$ então $1 - e^c > 0$ e temos $\dfrac{e^c(1-e^c)}{(e^c+1)^3} \cdot \dfrac{x^3}{3!} < 0$. Se $x = 0$ obtemos a proposição verdadeira $f(0) = \log(2) \leq \log(2)$. Podemos afirmar que

$$\frac{e^c(1-e^c)}{(e^c+1)^3} \cdot \frac{x^3}{3!} \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então

$$f(x) = \log(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{e^c(1-e^c)}{(e^c+1)^3} \cdot \frac{x^3}{3!} \leq \log(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x < 0 \\ x + \mathrm{sen}(2x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.

(b) **[1.5 val.]** Caracterize a função derivada de f.

(c) **[2.0 val.]** Estude a monotonia e os extremos de f.

(d) **[2.5 val.]** Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}^+$.

Resposta: (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \ \wedge \ x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}$.

(b) Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \left(x + 2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)', & \text{se } x < 0 \\ (x + \mathrm{sen}(2x))', & \text{se } x > 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + 2\,\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}, & \text{se } x < 0 \\ 1 + 2\cos(2x), & \text{se } x > 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \\ 1 + 2\cos(2x), & \text{se } x > 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \\ 1 + 2\cos(2x), & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vejamos se f é contínua em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x + \operatorname{sen}(2x)) = 0;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\pi.$$

Como os limites laterais são diferentes, f não tem limite em $x = 0$ e, portanto, não é contínua. Podemos assim concluir que não existe $f'(0)$.

(c) Verifica-se que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1 = 0 \wedge x < 0) \vee (1 + 2\cos(2x) = 0 \wedge x > 0),$$

isto é,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Estudemos o sinal da primeira derivada para determinarmos a monotonia da função e eventuais extremos.

A função $1 + 2\cos(2x)$ é periódica de período π o que nos permite fazer o estudo do sinal da derivada num intervalo de amplitude π no caso em que $x > 0$.

		-1		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	$+$	0	$-$	////	$+$	0	$-$	0	$+$	3
$f(x)$	$\nearrow$	$-1 - \frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

A função é crescente nos intervalos $]-\infty, -1[$, $\left]k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right[$ e $\left]\frac{2\pi}{3} + k\pi, \pi + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{N}_0$.

A função é decrescente nos intervalos $]-1, 0[$ e $\left]\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Existem mínimos locais em $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$, isto é, $f\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{N}_0$, são mínimos locais de f.

Em $x = -1$ e em $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$, f tem máximos locais, isto é, $f(-1)$ e $f\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$ são máximos locais de f.

Como f é decrescente em $]-1, 0[$ e crescente em $]0, \frac{\pi}{3}[$, tendo em atenção que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\pi,$$

podemos concluir que f não tem extremo relativo em $x = 0$.

(d) Se $x > 0$ temos

$$f''(x) = \big(1 + 2\cos(2x)\big)' = -4\operatorname{sen}(2x),$$

portanto,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi,\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{N}.$$

Como

$$f'''(x) = -8\cos(2x)$$

temos

$$f'''\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -8\cos(k\pi) \neq 0.$$

Como a primeira derivada que não se anula em $x = k\pi$ é de ordem ímpar podemos afirmar, pelo Teorema de Taylor, que o gráfico de f tem pontos de inflexão em $\left(\frac{k\pi}{2}, f\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

4. **[2.0 val.]** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e $f'(-1) = f'(1) = 0$. Mostre que existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f''(c) \cdot f(c) - \big(f'(c)\big)^2 = 0$.

   Sugestão: Considere a função $g(x) = \log\big(f(x)\big)$.

Resposta: (É uma aplicação do Teorema de Rolle à função g')

Se f é positiva e duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e a função logarítmica é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^+$, então, pelo teorema da derivação da função composta, g é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Derivando a função g obtemos

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Por hipótese, $f'(1) = f'(-1) = 0$, portanto, $g'(1) = g'(-1) = 0$. Como g é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ podemos afirmar que g' é contínua em $[-1, 1]$ e diferenciável em $]-1, 1[$. Pelo Teorema de Rolle existe $c \in]-1, 1[$ tal que $g''(c) = 0$. Mas

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f'(x)}{\big(f(x)\big)^2} \\ &= \frac{f''(x) \cdot f(x) - \big(f'(x)\big)^2}{\big(f(x)\big)^2} \end{aligned}$$

portanto,

$$g''(c) = 0 \Leftrightarrow f''(c) \cdot f(c) - \big(f'(c)\big)^2 = 0$$

como pretendíamos provar.