

Grelha de Correção do Enunciado A

Análise Matemática I

3º Teste – 9 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = e^{x-1}(1 + e^x)$. Então $\int_{\log(2)}^{\log(4)} f(x) dx$ é igual a:

- (a) $\frac{8}{e}$. (b) $\frac{16}{e}$. (c) $-\frac{8}{e}$. (d) $\frac{1}{2e}$.

2. Seja $f(x)$ a solução do problema

$$f'(x) = \frac{36}{\pi} \cdot \frac{x^2}{9 + x^6}, \text{ com } -\infty < x < +\infty \text{ e } f(\sqrt[3]{3}) = -2.$$

O valor de $f(x)$ no ponto $x = -\sqrt[3]{3}$ é

- (a) 3. (b) 4. (c) -3. (d) -4.

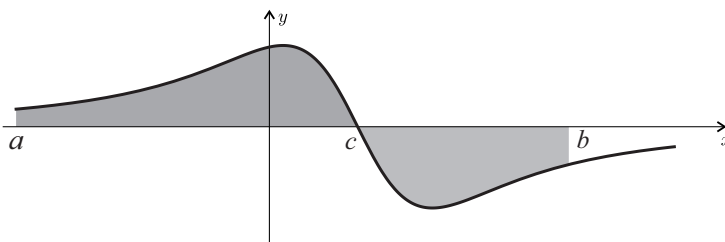
3. Sejam $I_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} dx$, $I_2 = \int_{-\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg}^2(x)} dx$ e $I_3 = \int_0^{3\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$. Considere as seguintes afirmações:

- I. I_1 é um integral impróprio de 2ª espécie;
- II. I_2 é um integral impróprio de 1ª espécie;
- III. I_2 é um integral impróprio misto;
- IV. I_3 é um integral de Riemann.

A **lista completa** das afirmações correctas é:

- (a) I e III. (c) I e II.
(b) I, III e IV. (d) II e IV.

-
4. Considere a região limitada pelo gráfico da função f , o eixo das abcissas e as rectas $x = a$ e $x = b$, como representada na figura.



A área desta região pode exprimir-se por

- (a) $\int_a^b f(x) dx$.
 (b) $\int_a^c f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
 (c) $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
 (d) $\int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx$.

-
5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, positiva, tal que $\log(f(x)) = \int_0^x \frac{t}{f(t)(1+t^2)} dt$ e $f(\sqrt{e-1}) = \frac{3}{2}$. Então:

- (a) $f(x) = \frac{1}{4} \log(1+x^2) + \frac{5}{4}$.
 (b) $f(x) = 2 \log(\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2}$.
 (c) $f(x) = \log(\sqrt{1+x^2}) + 1$.
 (d) $f(x) = \frac{1}{2} \log(1+x^2) - 1$.
-

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. [2,5 val.] Calcule as primitivas da função $f(x) = x^7 \cos(x^4 + 1)$.

Resposta: Seja $f(x) = x^7 \cos(x^4 + 1)$. Consideremos $h(x) = x^3 \cos(x^4 + 1)$ e $g(x) = x^4$. Uma primitiva de h é $H(x) = \frac{1}{4} \sin(x^4 + 1)$ e $g'(x) = 4x^3$, portanto,

$$\begin{aligned} P x^7 \cos(x^4 + 1) &= \frac{x^4}{4} \sin(x^4 + 1) - P 4x^3 \cdot \frac{1}{4} \sin(x^4 + 1) \\ &= \frac{x^4}{4} \sin(x^4 + 1) - \frac{1}{4} P 4x^3 \sin(x^4 + 1) \\ &= \frac{x^4}{4} \sin(x^4 + 1) + \frac{1}{4} \cos(x^4 + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Considere o integral

$$\int_e^{e^2} \frac{2 + \log(x)}{x(\log^4(x) + 3 \log^2(x))} dx.$$

(a) [2.0 val.] Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_e^{e^2} \frac{2 + \log(x)}{x(\log^4(x) + 3\log^2(x))} dx = \int_1^2 \frac{t + 2}{t^2(t^2 + 3)} dt.$$

(b) [2.5 val.] Calcule o valor do integral.

Resposta: (a) A substituição indicada é $\log(x) = t = \varphi^{-1}(x)$ o que implica que

$$\varphi^{-1}(e) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi^{-1}(e^2) = 2.$$

Além disso, $x = \varphi(t) = e^t$ e $\varphi'(t) = e^t$, portanto,

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{2 + \log(x)}{x(\log^4(x) + 3\log^2(x))} dx &= \int_1^2 \frac{2 + t}{e^t(t^4 + 3t^2)} \cdot e^t dt \\ &= \int_1^2 \frac{2 + t}{t^4 + 3t^2} dt = \int_1^2 \frac{t + 2}{t^2(t^2 + 3)} dt. \end{aligned}$$

(b) O polinómio $t^2(t^2 + 3)$ tem uma raiz real ($x = 0$) com multiplicidade 2 e um par de raízes complexas ($x = \pm i\sqrt{3}$) com multiplicidade 1. Então

$$\begin{aligned} \frac{t + 2}{t^2(t^2 + 3)} &= \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{Ct + D}{t^2 + 3} \\ &= \frac{A(t^2 + 3) + Bt(t^2 + 3) + (Ct + D)t^2}{t^2(t^2 + 3)} \\ &= \frac{(B + C)t^3 + (A + D)t^2 + 3Bt + 3A}{t^2(t^2 + 3)}. \end{aligned}$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados temos

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + D = 0 \\ 3B = 1 \\ 3A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{3} \\ C = -\frac{1}{3} \\ D = -\frac{2}{3}, \end{cases}$$

portanto,

$$\frac{t + 2}{t^2(t^2 + 3)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{3} \cdot \frac{t + 2}{t^2 + 3}$$

e

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{2 + \log(x)}{x(\log^4(x) + 3\log^2(x))} dx &= \int_1^2 \frac{t + 2}{t^2(t^2 + 3)} dt \\ &= \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{t} dt - \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{t + 2}{t^2 + 3} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 + \frac{1}{3} \left[\log |t| \right]_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{t}{t^2+3} dt - \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{2}{t^2+3} dt \\
&= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{1}{3} \log(2) - \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{2t}{t^2+3} dt - \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{1}{t^2+3} dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log(2) - \frac{1}{6} \left[\log(t^2+3) \right]_1^2 - \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right)^2} dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log(2) - \frac{1}{6} \left(\log(7) - \log(4) \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_1^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right)^2} dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log(2) - \frac{1}{6} \log \left(\frac{7}{4} \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log(2) - \frac{1}{3} \log \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log \left(\frac{4}{\sqrt{7}} \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\pi}{6} \right).
\end{aligned}$$

3. [2.0 val.] Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1 \text{ e } g(x) = 2x + 1.$$

Resposta: Começemos por determinar os pontos de intersecção dos gráficos das funções. As abcissas desses pontos são obtidas resolvendo a equação $f(x) = g(x)$:

$$x^3 - x^2 + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -1.$$

Como $g(-\frac{1}{2}) = 0$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$, $g(1) = 3$ e $f(1) = 1$, e as funções são ambas contínuas, podemos afirmar que $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [-1, 0]$, e $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0, 2]$. A área pedida é dada por

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx \\
&= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 + 1 - (2x + 1)) dx + \int_0^2 (2x + 1 - (x^3 - x^2 + 1)) dx \\
&= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (2x - x^3 + x^2) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}.
\end{aligned}$$

4. Considere a função F , real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_0^{2x^3} \frac{e^t}{t+2} dt.$$

(a) [2,0 val.] Determine o domínio de F . Justifique a sua resposta.

(b) [2,0 val.] Calcule a derivada de F . Justifique a sua resposta.

Resposta: (a) A função F é a composição de $h(x) = 2x^3$ com $G(y) = \int_0^y \frac{e^t}{t+2} dt$, isto é, podemos escrever $F(x) = G(h(x))$. Designemos por A o domínio de h e por B o domínio de G . O domínio, D , de F é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \wedge h(x) \in B\}.$$

Temos $A = \mathbb{R}$ visto que h é uma função polinomial. Para determinar B começamos por calcular o domínio, C , da função integranda $g(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Para que o intervalo de extremos 0 e y esteja contido em C é necessário e suficiente que $y > -2$. Podemos concluir que $B =]-2, +\infty[$. Então

$$D = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \in]-2, +\infty[\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x^3 > -2\} =]-1, +\infty[.$$

(b) A função g é contínua em C , portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral G é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e

$$G'(x) = g(x) = \frac{e^x}{x+2}.$$

Como h é diferenciável em $\mathbb{R}$ podemos afirmar, pelo teorema da derivação da função composta, que F é diferenciável em $] - 1, +\infty[$ e

$$F'(x) = G'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{e^{2x^3}}{2x^3+2} \cdot 6x^2 = \frac{3x^2 e^{2x^3}}{x^3+1}, \quad \forall x \in]-1, +\infty[.$$

5. [2.0 val.] Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)\arctg^2(x)} dx.$$

Resposta: A função integranda tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua nesse conjunto, portanto, é contínua no intervalo de integração. Por esse motivo o integral é impróprio de primeira espécie. Por definição

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)\arctg^2(x)} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)\arctg^2(x)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} \cdot \arctg^{-2}(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\arctg^{-1}(x) \right]_t^{-\sqrt{3}} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{\arctg(-\sqrt{3})} + \frac{1}{\arctg(t)} \right) = \frac{3}{\pi} - \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$