FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado B

Análise Matemática I

3º Teste — 9 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = e^{x-3}(2+e^x)$. Então $\displaystyle\int_{\log(2)}^{\log(4)} f(x)\,dx$ é igual a:

(a) $20\,e^{-3}$. (b) $-\dfrac{10}{e^3}$. (c) $\dfrac{10}{e^3}$. (d) $-20e^{-3}$.

---

2. Seja $f(x)$ a solução do problema

$$f'(x) = \frac{36}{\pi}\cdot\frac{x^2}{9+x^6}, \text{ com } -\infty < x < +\infty \text{ e } f(\sqrt[3]{3}) = -2.$$

O valor de $f(x)$ no ponto $x = -\sqrt[3]{3}$ é

(a) -4. (b) 3. (c) 4. (d) -3.

---

3. Sejam $I_1 = \displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\,dx$, $I_2 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg}^2(x)}\,dx$ e $I_3 = \displaystyle\int_0^{3\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$. Considere as seguintes afirmações:

I. I_1 é um integral impróprio de 2ª espécie;

II. I_2 é um integral impróprio de 1ª espécie;

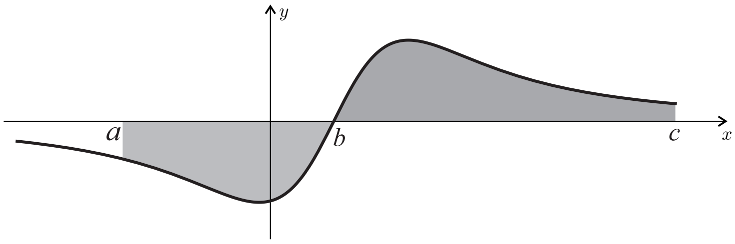
III. I_2 é um integral impróprio misto;

IV. I_3 é um integral de Riemann.

A **lista completa** das afirmações correctas é:

(a) I e III.
(b) I e II.
(c) II e IV.
(d) I, III e IV.

4. Considere a região limitada pelo gráfico da função f, o eixo das abcissas e as rectas $x = a$ e $x = c$, como representada na figura.



A área desta região pode exprimir-se por

(a) $\displaystyle\int_b^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_b^c f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx.$

---

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, positiva, tal que $\log\big(f(x)\big) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{f(t)(1+t^2)}\,dt$ e $f(\sqrt{e-1}) = \dfrac{3}{2}$. Então:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{4}\log(1+x^2) + \dfrac{5}{4}.$

(b) $f(x) = 2\log(\sqrt{1+x^2}) + \dfrac{1}{2}.$

(c) $f(x) = \log(\sqrt{1+x^2}) + 1.$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log(1+x^2) - 1.$

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[2,5 val.]** Calcule as primitivas da função $f(x) = x^7\cos(x^4+1)$.

2. Considere o integral

$$\int_e^{e^2} \frac{2+\log(x)}{x\big(\log^4(x) + 3\log^2(x)\big)}\,dx.$$

(a) **[2.0 val.]** Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_e^{e^2} \frac{2+\log(x)}{x\big(\log^4(x) + 3\log^2(x)\big)}\,dx = \int_1^2 \frac{t+2}{t^2(t^2+3)}\,dt.$$

(b) **[2.5 val.]** Calcule o valor do integral.

3. **[2.0 val.]** Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1 \;\text{ e }\; g(x) = 2x+1.$$

4. Considere a função F, real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_0^{2x^3} \frac{e^t}{t+2}\, dt.$$

(a) **[2,0 val.]** Determine o domínio de F. Justifique a sua resposta.

(b) **[2,0 val.]** Calcule a derivada de F. Justifique a sua resposta.

5. **[2.0 val.]** Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)\operatorname{arctg}^2(x)}\, dx.$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^\mu$ $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \dots, s\}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\text{sen}(t)$ ou $x = a\,\cos(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(t)$ ou $x = a\,\text{cosec}(t)$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$