FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Grelha de Correcção do Enunciado B

Análise Matemática I

3º Teste – 9 de Junho de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = e^{x-3}(2+e^x)$. Então $\displaystyle\int_{\log(2)}^{\log(4)} f(x)\,dx$ é igual a:

   (a) $20\,e^{-3}$. (b) $-\dfrac{10}{e^3}$. (c) $\dfrac{10}{e^3}$. (d) $-20e^{-3}$.

---

2. Seja $f(x)$ a solução do problema

$$f'(x) = \frac{36}{\pi}\cdot\frac{x^2}{9+x^6},\ \text{com } -\infty < x < +\infty \text{ e } f(\sqrt[3]{3}) = -2.$$

   O valor de $f(x)$ no ponto $x = -\sqrt[3]{3}$ é

   (a) -4. (b) 3. (c) 4. (d) -3.

---

3. Sejam $I_1 = \displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\,dx$, $I_2 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg}^2(x)}\,dx$ e $I_3 = \displaystyle\int_0^{3\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$. Considere as seguintes afirmações:

   I. I_1 é um integral impróprio de 2ª espécie;

   II. I_2 é um integral impróprio de 1ª espécie;

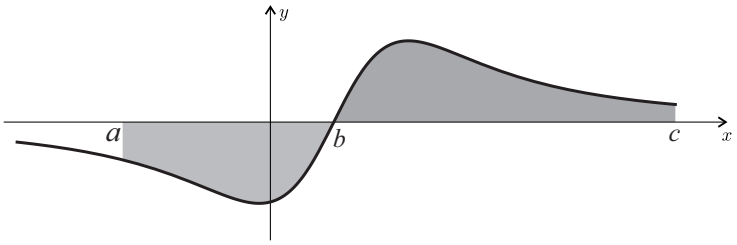
   III. I_2 é um integral impróprio misto;

   IV. I_3 é um integral de Riemann.

   A **lista completa** das afirmações correctas é:

   (a) I e III. (c) II e IV.
   (b) I e II. (d) I, III e IV.

4. Considere a região limitada pelo gráfico da função f, o eixo das abcissas e as rectas $x = a$ e $x = c$, como representada na figura.



A área desta região pode exprimir-se por

(a) $\displaystyle\int_b^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_b^c f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx.$

---

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, positiva, tal que $\log\big(f(x)\big) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{f(t)(1+t^2)}\,dt$ e $f(\sqrt{e-1}) = \dfrac{3}{2}$. Então:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{4}\log(1+x^2) + \dfrac{5}{4}.$

(b) $f(x) = 2\log(\sqrt{1+x^2}) + \dfrac{1}{2}.$

(c) $f(x) = \log(\sqrt{1+x^2}) + 1.$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log(1+x^2) - 1.$

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[2,5 val.]** Calcule as primitivas da função $f(x) = x^7\cos(x^4+1)$.

Resposta: Seja $f(x) = x^7\cos(x^4+1)$. Consideremos $h(x) = x^3\cos(x^4+1)$ e $g(x) = x^4$. Uma primitiva de h é $H(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{sen}(x^4+1)$ e $g'(x) = 4x^3$, portanto,

$$\begin{aligned} P\ x^7\cos(x^4+1) &= \frac{x^4}{4}\mathrm{sen}(x^4+1) - P\ 4x^3\cdot\frac{1}{4}\mathrm{sen}(x^4+1) \\ &= \frac{x^4}{4}\mathrm{sen}(x^4+1) - \frac{1}{4}\,P\ 4x^3\,\mathrm{sen}(x^4+1) \\ &= \frac{x^4}{4}\mathrm{sen}(x^4+1) + \frac{1}{4}\,\cos(x^4+1) + C,\ C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Considere o integral

$$\int_e^{e^2} \frac{2+\log(x)}{x\big(\log^4(x) + 3\log^2(x)\big)}\,dx.$$

(a) **[2.0 val.]** Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_e^{e^2} \frac{2+\log(x)}{x\big(\log^4(x)+3\log^2(x)\big)}\,dx = \int_1^2 \frac{t+2}{t^2(t^2+3)}\,dt.$$

(b) **[2.5 val.]** Calcule o valor do integral.

Resposta: (a) A substituição indicada é $\log(x) = t = \varphi^{-1}(x)$ o que implica que

$$\varphi^{-1}(e) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi^{-1}\left(e^2\right) = 2.$$

Além disso, $x = \varphi(t) = e^t$ e $\varphi'(t) = e^t$, portanto,

$$\int_e^{e^2} \frac{2+\log(x)}{x\big(\log^4(x)+3\log^2(x)\big)}\,dx = \int_1^2 \frac{2+t}{e^t(t^4+3t^2)}\cdot e^t\,dt$$

$$= \int_1^2 \frac{2+t}{t^4+3t^2}\,dt = \int_1^2 \frac{t+2}{t^2(t^2+3)}\,dt.$$

(b) O polinómio $t^2(t^2+3)$ tem uma raiz real ($x=0$) com multiplicidade 2 e um par de raízes complexas ($x = \pm i\sqrt{3}$) com multiplicidade 1. Então

$$\begin{aligned}\frac{t+2}{t^2(t^2+3)} &= \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{Ct+D}{t^2+3}\\ &= \frac{A(t^2+3)+Bt(t^2+3)+(Ct+D)t^2}{t^2(t^2+3)}\\ &= \frac{(B+C)t^3+(A+D)t^2+3Bt+3A}{t^2(t^2+3)}.\end{aligned}$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados temos

$$\begin{cases} B+C &= 0\\ A+D &= 0\\ 3B &= 1\\ 3A &= 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= \frac{2}{3}\\ B &= \frac{1}{3}\\ C &= -\frac{1}{3}\\ D &= -\frac{2}{3},\end{cases}$$

portanto,

$$\frac{t+2}{t^2(t^2+3)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t} - \frac{1}{3}\cdot\frac{t+2}{t^2+3}$$

e

$$\int_e^{e^2} \frac{2+\log(x)}{x\big(\log^4(x)+3\log^2(x)\big)}\,dx = \int_1^2 \frac{t+2}{t^2(t^2+3)}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt + \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{t+2}{t^2+3}\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 + \frac{1}{3}\Big[\log|t|\Big]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{t}{t^2+3}\,dt - \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{2}{t^2+3}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}+1\right) + \frac{1}{3}\log(2) - \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{2t}{t^2+3}\,dt - \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{t^2+3}\,dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log(2) - \frac{1}{6}\Big[\log(t^2+3)\Big]_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}\,dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log(2) - \frac{1}{6}\Big(\log(7)-\log(4)\Big) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\int_1^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}\,dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log(2) - \frac{1}{6}\log\left(\frac{7}{4}\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log(2) - \frac{1}{3}\log\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}
$$

3. **[2.0 val.]** Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x + 1.$$

Resposta: Comecemos por determinar os pontos de intersecção dos gráficos das funções. As abcissas desses pontos são obtidas resolvendo a equação $f(x) = g(x)$:

$$x^3 - x^2 + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -1.$$

Como $g(-\frac{1}{2}) = 0$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$, $g(1) = 3$ e $f(1) = 1$, e as funções são ambas contínuas, podemos afirmar que $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [-1, 0]$, e $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0, 2]$. A área pedida é dada por

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx + \int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} \big(x^3 - x^2 + 1 - (2x+1)\big)\,dx + \int_0^2 \big(2x + 1 - (x^3 - x^2 + 1)\big)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} \big(x^3 - x^2 - 2x\big)\,dx + \int_0^2 \big(2x - x^3 + x^2\big)\,dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}.
\end{aligned}
$$

4. Considere a função F, real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_0^{2x^3} \frac{e^t}{t+2}\,dt.$$

(a) **[2,0 val.]** Determine o domínio de F. Justifique a sua resposta.

(b) **[2,0 val.]** Calcule a derivada de F. Justifique a sua resposta.

Resposta: (a) A função F é a composição de $h(x) = 2x^3$ com $G(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{e^t}{t+2}\,dt$, isto é, podemos escrever $F(x) = G(h(x))$. Designemos por A o domínio de h e por B o domínio de G. O domínio, D, de F é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \wedge h(x) \in B\}.$$

Temos $A = \mathbb{R}$ visto que h é uma função polinomial. Para determinar B começamos por calcular o domínio, C, da função integranda $g(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Para que o intervalo de extremos 0 e y esteja contido em C é necessário e suficiente que $y > -2$. Podemos concluir que $B =]-2, +\infty[$. Então

$$D = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \in]-2, +\infty[\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x^3 > -2\} =]-1, +\infty[.$$

(b) A função g é contínua em C, portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral G é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e

$$G'(x) = g(x) = \frac{e^x}{x+2}.$$

Como h é diferenciável em $\mathbb{R}$ podemos afirmar, pelo teorema da derivação da função composta, que F é diferenciável em $]-1, +\infty[$ e

$$F'(x) = G'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{e^{2x^3}}{2x^3+2} \cdot 6x^2 = \frac{3x^2\, e^{2x^3}}{x^3+1},\ \forall x \in]-1, +\infty[.$$

5. **[2.0 val.]** Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)\mathrm{arctg}^2(x)}\,dx.$$

Resposta: A função integranda tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua nesse conjunto, portanto, é contínua no intervalo de integração. Por esse motivo o integral é impróprio de primeira espécie. Por definição

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)\mathrm{arctg}^2(x)}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{-\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)\mathrm{arctg}^2(x)}\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty} \int_t^{-\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} \cdot \mathrm{arctg}^{-2}(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \left[-\mathrm{arctg}^{-1}(x)\right]_t^{-\sqrt{3}} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left(-\frac{1}{\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})} + \frac{1}{\mathrm{arctg}(t)}\right) = \frac{3}{\pi} - \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$