Análise Matemática 1 - Exame

29 de Junho 2018

Duração: 3h

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta indique, para cada item, qual a opção correcta.

(Resposta correcta: 0,75 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,25) v.)

1. Qual o limite da sucessão $a_n = \sin(e^{-n}) \cdot e^{n+1}$?

(a) 0 (b) 1 **(c)** e (d) π

2. Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Podemos afirmar que:

(a) f tem limite em $+\infty$ e é prolongável por continuidade em $x = 0$.

(b) f é uma função limitada e monótona no seu domínio.

(c) f não é uma função limitada nem monótona no seu domínio.

(d) f tem limite em $-\infty$ e não é prolongável por continuidade em $x = 0$.

3. Seja D o domínio da função real de variável real

$$h(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Podemos afirmar que:

(a) $0 \in int(D)$ (b) $Fr(D) \cap [0, +\infty[= \left\{ \frac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $0 \in ext(D)$ **(d)** $(Fr(D))' = \{0\}$

Grupo 2 – (Mude de folha)

(a) (1 v.) Indique os sublimites da sucessão $a_n = \left(1 + \frac{1+(-1)^n}{n}\right)^n$

Resposta: A subsucessão (a_{2n}) (com índices pares) verifica

$$\lim a_{2n} = \lim \left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n} = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2$$

A subsucessão (a_{2n-1}) (com índices ímpares) verifica

$$\lim a_{2n} = \lim \left(1 + \frac{0}{2n-1}\right)^{2n-1} = \lim 1 = 1$$

pelo que os sublimites da sucessão são 1 e e^2.

(b) (1 v.) Prove por indução

$$\ln(n!) \leq \frac{n^2}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Nota: tenha em conta que $\ln(x) \leq x - 1$ para todo o $x > 0$.)

Resposta: A desigualdade é verdadeira para $n = 1$ $(0 < 1/2)$. Mostremos que a propriedade é indutiva.

Hipótese de indução: supomos a desigualdade verdadeira para n.

Demonstremos a tese de indução:

$$\ln((n+1)!) = \ln((n+1) \cdot n!) = \ln(n+1) + \ln(n!) < \ln(n+1) + \frac{n^2}{2}$$

Posto que $\ln(x) \leq x - 1$ para $x > 0$, temos então

$$\ln(n+1) + n^2 < n + \frac{n^2}{2} = \frac{n^2 + 2n}{2} < \frac{(n+1)^2}{2}$$

pelo que a propriedade é indutiva. A desigualdade é pois verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Grupo 3 – (Mude de folha)

Considere a sucessão definida por

$$u_1 = 3\,, \qquad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \qquad \text{se} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n > 1$$

(a) (0,4 v.) Justifique que

$$u_n \geq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: Verifica-se que $u_1 = 3 \geq 1$. Supondo a propriedade verdadeira para u_n, temos

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \geq \sqrt{2} > 1$$

pelo que que a propriedade é indutiva, o que conclui a justificação.

(b) (0,8 v.) Utilizando a alínea anterior, mostre que

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\,|u_{n+1} - u_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e conclua que (u_n) é convergente.

Resposta: Temos

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |\sqrt{1+u_{n+1}} - \sqrt{1+u_n}| = \left| \frac{|u_{n+1} - u_n|}{\sqrt{1+u_{n+1}} + \sqrt{1+u_n}} \right|$$

Pela alínea anterior, temos

$$\sqrt{1+u_{n+1}} + \sqrt{1+u_n} \geq 2\sqrt{2}$$

logo

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{u_{n+1} - u_n}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,|u_{n+1} - u_n|$$

Posto que $0 \leq \frac{\sqrt{2}}{4} < 1$, por um resultado teórico, concluímos que a sucessão é convergente.

(c) (0,8 v.) Determine o limite de (u_n).

Resposta: Sendo l o limite da sucessão (u_n), temos

$$l \geq 1 \quad \text{e} \quad l = \sqrt{l+1}$$

Elevando ao quadrado a segunda desigualdade, temos $l^2 - l - 1 = 0$. Aplicando a fórmula resolvente, obtemos

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

pelo que $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Grupo 4 – (Mude de folha)

Na folha de resposta indique, para cada item, qual a opção correcta.

(Resposta correcta: 0,75 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,25) v.)

1. Considere a função $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) h é contínua e diferenciável em $x = 0$.

(b) h é contínua e não é diferenciável em $x = 0$.

(c) h é contínuamente diferenciável em $\mathbb{R}$.

(d) h não é contínua em $x = 0$.

2. Qual o valor de $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$?

(a) $-\infty$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) $+\infty$

3. Considere a função diferenciável $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sin(x) \cdot (x^2 - 1)$$

Podemos afirmar que:

(a) f' tem no máximo três zeros em $]-\pi, \pi[$

(b) f' tem exactamente quatro zeros em $]-\pi, \pi[$.

(c) f' tem mais de quatro zeros em $]-\pi, \pi[$.

(d) $x = 0$ é o único zero de f' em $]-\pi, \pi[$.

Grupo 5 – (Mude de folha)

Considere a função $f : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan(x) - x$.

(a) (0,8 v.) Verifique que f é estritamente crescente.

Resposta: Derivando, obtemos

$$f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$$

Temos que f é contínua e $f'(x) > 0$ se $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ pelo que f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$. Por um argumento semelhante, f é estritamente crescente em $[0, \frac{\pi}{2}[$. Logo f é estritamente crescente em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(b) (0,8 v.) Estude a existência de pontos de inflexão no gráfico de f.

Resposta: Temos

$$f''(x) = 2\tan(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

donde $f''(x) < 0$ se $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ e $f''(x) > 0$ se $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Concluímos que o ponto $(0,0)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f.

(c) (0,4 v.) Seja $f^{-1} : \mathbb{R} \mapsto \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ a inversa de f para a composição de funções. Justifique que f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ e calcule $(f^{-1})'(y_0)$.

Resposta: Temos que $f'(\pi/4) = \tan^2(\pi/4) = \dfrac{1}{2} \neq 0$ pelo que f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(\pi/4)$ e tem-se

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = 2$$

Grupo 6 – (Mude de folha)

(a) (1 v.) Aplique o Teorema do Valor Médio de Lagrange no intervalo $[0, a]$ à função $\ln(1 + x)$ e conclua

$$\ln(1 + a) < a \qquad \forall\, a > 0$$

Resposta: Aplicando o Teorema do Valor Médio de Lagrange no intervalo $[0, a]$ temos

$$\frac{\ln(1+a) - \ln(1)}{a - 0} = \frac{1}{1+c}$$

em que $c \in]0, a[$. Concluímos que $\frac{1}{1+c} < 1$ e, posto que $a > 0$,

$$\ln(1 + a) = \frac{a}{1+c} < a$$

o que prova o resultado.

(b) (1 v.) Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$, com derivada positiva. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln(f(b)) - \ln(f(a))} = f(c)$$

(sugestão: utilize o Teorema de Cauchy)

Resposta: Temos

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} > 0 \qquad \forall x \in]a,b[$$

pelo que estamos nas condições de aplicabilidade do Teorema de Cauchy. Concluímos que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln(f(b))-\ln(f(a))} = \frac{f'(c)}{\frac{f'(c)}{f(c)}} = f(c)$$

o que demonstra o resultado.

Grupo 7 – (Mude de folha)

Recorde que a área de uma elipse com semi-eixos de comprimento x e y é dada por

$$A(x,y) = \pi \cdot x \cdot y \qquad (x, y > 0)$$

Euler propôs a seguinte fórmula

$$P(x,y) = \pi \cdot \sqrt{2(x^2+y^2)}$$

para a obtenção de um valor aproximado do perímetro de uma elipse.

(a) (0,4 v.) Justifique que, no caso de uma elipse com área π e com semi-eixo $x > 0$, a aproximação do perímetro formulada por Euler é dada pela função

$$P(x) = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \qquad \text{com } x \in \,]0, +\infty[$$

Resposta: Temos que

$$A(x,y) = \pi \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{x}$$

Substituindo em $P(x,y)$ concluímos que

$$P(x, 1x) = \pi \cdot \sqrt{2\left(x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)} = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

(b) (1,6 v.) Mostre que a função $P(x)$ definida na alínea anterior atinge um mínimo absoluto num único ponto $x_0 \in]0, +\infty[$ e interprete geometricamente o resultado.

Resposta: Derivando $P(x)$ obtemos

$$P'(x) = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} \cdot \left(2x - \frac{2}{x^3}\right)$$

O sinal da derivada é o sinal da expressão

$$2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3} \cdot (x^2 - 1)$$

pelo que P é estritamente decrescente em $]0,1[$ e estritamente crescente em $]1,+\infty[$. Deste modo $P(x)$ atinge um mínimo absoluto num único ponto $x_0 = 1$. Nesse caso, tem-se que $y_0 = 1/x_0 = 1$ pelo que a elipse tem ambos os semi-eixos com comprimento unitário. É pois a circunferência de raio 1 que minimiza P na classe das elipses de área π.

Grupo 8 – (Mude de folha)

Na folha de resposta indique, para cada item, qual a opção correcta.

(Resposta correcta: 0,75 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,25) v.)

1. Seja $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $v(0) = v'(0) = 1$. Qual o polinómio de Taylor de ordem 2 em $x = 0$ da função

$$\int_0^{\ln(1+x)} v(t)\,dt \quad ?$$

(a) x (b) $x + \frac{x^2}{2}$ (c) $x + x^2$ (d) $x - \frac{x^2}{2}$

2. Indique qual das seguintes expressões resulta de $\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\,dx$ após a mudança de variável $x = t^2$.

(a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2t \cdot \cos(t)\,dt$ (b) $\int_0^1 \cos(\pi t)\,dt$

(c) $\int_0^{\pi} 2t \sin(t)\,dt$ **(d)** $2\int_0^{\pi} t \cdot \cos(t)\,dt$

Grupo 9 – (Mude de folha)

(a) (1 v.) Determine a primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$ que se anula em $x = 1$ indicando o intervalo em que se encontra definida.

Resposta: Escrevemos

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

Resolvendo um sistema, obtemos $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$ pelo que

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

A condição incial de anulamento em $x = 1$ determina $c = \frac{\ln(2)}{2}$ e como domínio o intervalo $]0, +\infty[$.

(b) (1 v.) Utilize o método de integração por partes para calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(x)\,dx$.

(recorde: $(\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

Resposta: Calculamos

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 \cdot \arcsin(x)\,dx = [x \cdot \arcsin(x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Temos

$$[x \cdot \arcsin(x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arcsin(\sqrt{2}/2) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

$$-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

Concluímos

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(x)\,dx = \frac{(\pi+4)\sqrt{2}}{8} - 1$$

Grupo 10 – (Mude de folha)

(a) (0,5 v.) Considere a função $f(x) = \dfrac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ em que $x \in [0,1]$. Calcule

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

e interprete geometricamente este valor.

Resposta: Temos

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1$$

e este valor representa o comprimento do gráfico de f.

(b) (1 v.) Considere a função

$$h(x) = \cosh(x)\,, \qquad x \in [\ln(1/2), \ln(2)]$$

Justifique que a área S da superfície gerada por revolução do gráfico de h em torno do eixo das abcissas verifica

$$S = 4\pi \cdot \int_0^{\ln(2)} \cosh^2(x)\,dx$$

Resposta: Aplicando a fórmula para o cálculo de uma superfície de revolução, obtemos

$$S = \int_{\ln(1/2)}^{\ln 2} 2\pi \cosh(x)\sqrt{1+\sinh^2(x)}\,dx$$

Temos

$$\sqrt{1+\sinh^2(x)} = \sqrt{\cosh^2(x)} = \cosh(x)$$

Por outro lado, posto que $\ln(1/2) = -\ln 2$ e que a função $\cosh^2(x)$ é par, temos

$$S = 2\int_0^{\ln(2)} 2\pi\cosh^2(x) = 4\pi\cdot\int_0^{\ln(2)}\cosh^2(x)\,dx$$

(c) (0,5 v.) Calcule S em que S foi definido na alínea anterior.

Resposta: Temos

$$S = 4\pi\cdot\int_0^{\ln(2)}\cosh^2(x)\,dx = \pi\cdot\int_0^{\ln(2)} e^{2x}+e^{-2x}+2\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x\right]_0^{\ln(2)}$$

ou

$$S = \frac{15}{8} - \ln 4$$

<u>*formulário:*</u> $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$; $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$.

Fim.