Análise Matemática 1

Correcção Melhoria 1.º Teste

29 de Junho 2018

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta indique, para cada item, a opção correta.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Considere o subconjunto dos números reais

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Podemos afirmar que:

- (a) A é um conjunto ilimitado.
- (b) A tem supremo mas não tem máximo.
- (c) A tem infímo mas não tem mínimo.
- (d) A tem mínimo e máximo.
2. Seja $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $g(0) = 1$ e $g(1) = 0$. Para qual das seguintes funções podemos garantir a existência de uma raíz pertencente ao interior do intervalo $[0, 1]$?
- (a) $g(x) - x^2$ (b) $g(x) + x$ (c) $g(x) - e^x$ (d) $g(x) - (1 - x^2)$

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Podemos afirmar que:

(a) f tem limite em $+\infty$ e é prolongável por continuidade em $x = 0$.

(b) f é uma função limitada e monótona no seu domínio.

(c) f não é uma função limitada nem monótona no seu domínio.

(d) f tem limite em $-\infty$ e não é prolongável por continuidade em $x = 0$.

4. Qual o limite da sucessão $a_n = \sin(e^{-n}) \cdot e^{n+1}$?

- (a) 0 (b) 1 (c) e (d) π

5. Seja D o domínio da função real de variável real

$$h(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Podemos afirmar que:

- (a) $0 \in \text{int}(D)$ (b) $\text{Fr}(D) \cap [0, +\infty[= \left\{ \frac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{N} \right\}$
(c) $0 \in \text{ext}(D)$ (d) $(\text{Fr}(D))' = \{0\}$

Grupo 2 – (Mude de folha)

(a) (1,5 v.) Indique os sublimites da sucessão $a_n = \left(1 + \frac{1 + (-1)^n}{n}\right)^n$

Resposta: A subsucessão (a_{2n}) (com índices pares) verifica

$$\lim a_{2n} = \lim \left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n} = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2$$

A subsucessão (a_{2n-1}) (com índices ímpares) verifica

$$\lim a_{2n-1} = \lim \left(1 + \frac{0}{2n-1}\right)^{2n-1} = \lim 1 = 1$$

pelo que os sublimites da sucessão são 1 e e^2 .

(b) (1,5 v.) Calcule o limite da sucessão $b_n = \frac{2^n + n^5}{2^{n-3} + \ln n}$

Resposta: Escrevemos

$$b_n = \frac{2^n + n^5}{2^{n-3} + \ln n} = \frac{1 + n^5/2^n}{2^{-3} + \ln n/2^n}$$

Temos $\lim n^5/2^n = \lim \ln n/2^n = 0$ pelo que $\lim b_n = 1/2^{-3} = 8$.

(c) (2 v.) Prove por indução

$$\ln(n!) \leq \frac{n^2}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Nota: tenha em conta que $\ln(x) \leq x - 1$ para todo o $x > 0$.)

Resposta: A desigualdade é verdadeira para $n = 1$ ($0 < 1/2$). Mostremos que a propriedade é indutiva.

Hipótese de indução: supomos a desigualdade verdadeira para n .

Demonstremos a tese de indução:

$$\ln((n+1)!) = \ln((n+1) \cdot n!) = \ln(n+1) + \ln(n!) < \ln(n+1) + \frac{n^2}{2}$$

Posto que $\ln(x) \leq x - 1$ para $x > 0$, temos então

$$\ln(n+1) + n^2 < n + \frac{n^2}{2} = \frac{n^2 + 2n}{2} < \frac{(n+1)^2}{2}$$

pelo que a propriedade é indutiva. A desigualdade é pois verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Grupo 3 – (Mude de folha)

Considere a sucessão definida por

$$u_1 = 3, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \quad \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$$

(a) (1 v.) Justifique que

$$u_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: Verifica-se que $u_1 = 3 \geq 1$. Supondo a propriedade verdadeira para u_n , temos

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \geq \sqrt{2} > 1$$

pelo que a propriedade é indutiva, o que conclui a justificação.

(b) (2 v.) Utilizando a alínea anterior, mostre que

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |u_{n+1} - u_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e conclua que (u_n) é convergente.

Resposta: Temos

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |\sqrt{1 + u_{n+1}} - \sqrt{1 + u_n}| = \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} \right|$$

Pela alínea anterior, temos

$$\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n} \geq 2\sqrt{2}$$

logo

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{u_{n+1} - u_n}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} |u_{n+1} - u_n|$$

Posto que $0 \leq \frac{\sqrt{2}}{4} < 1$, por um resultado teórico, concluímos que a sucessão é convergente.

(c) (2 v.) Determine o limite de (u_n) .

Resposta: Sendo l o limite da sucessão (u_n) , temos

$$l \geq 1 \quad \text{e} \quad l = \sqrt{l + 1}$$

Elevando ao quadrado a segunda desigualdade, temos $l^2 - l - 1 = 0$. Aplicando a fórmula resolvente, obtemos

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

pelo que $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Grupo 4 – (Mude de folha)

Considere a função real de variável real $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \ln(1 + e^x)$$

(a) (1 v.) Justifique que f é injectiva .

Resposta: f é uma composição da função $1 + e^x$ e $\ln(x)$, ambas estritamente crescentes nos seus domínios, pelo que f é estritamente crescente.

(b) (2 v.) Mostre que a função inversa de f para a composição de funções é

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)$$

Resposta: Temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^x) = +\infty$$

Pelo Teorema de Bolzano temos que

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$$

pelo que o domínio de f^{-1} é $\mathbb{R}^+$. Temos além disso

$$y = \ln(1 + e^x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(e^y - 1)$$

o que justifica a caracterização da função inversa apresentada.

(c) (1 v.) Estude $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)}$ em que f^{-1} foi definida na alínea anterior.

Calculamos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x(1 + e^{-x}))}{\ln(e^x(1 - e^{-x}))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1 + e^{-x})}{x + \ln(1 - e^{-x})} = 1$$

Nota: aceita-se como válido o cálculo do limite através da regra de Cauchy fundamentada.

Fim.