

Análise Matemática 1

Correcção Melhoria 2.º Teste

29 de Junho de 2018

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta indique, para cada item, a opção correta.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = \pi^{-1}$.
Qual a equação da recta tangente ao gráfico da função

$$g(x) = \sin(\pi f(x))$$

no ponto com abcissa $x = 0$?

- (a) $y = x$ (b) $y = -x$ (c) $y = \pi x$ (d) $y = -\pi x + 1$

2. Considere a função $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

- (a) h é contínua e diferenciável em $x = 0$.
(b) h é contínua e não é diferenciável em $x = 0$.
(c) h é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$.
(d) h não é contínua em $x = 0$.

3. Qual a derivada da função $y(x) = 3^x$?

(a) $y'(x) = 3^x$

(b) $y'(x) = x \cdot 3^{x-1}$

(c) $y'(x) = \ln(3) \cdot e^x$

(d) $y'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$

4. Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$?

(a) $-\infty$

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $+\infty$

5. Considere a função diferenciável $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sin(x) \cdot (x^2 - 1)$$

Podemos afirmar que:

(a) f' tem no máximo três zeros em $] - \pi, \pi[$

(b) f' tem exactamente quatro zeros em $] - \pi, \pi[$.

(c) f' tem mais de quatro zeros em $] - \pi, \pi[$.

(d) $x = 0$ é o único zero de f' em $] - \pi, \pi[$.

Grupo 2 – (Mude de folha)

Considere a função $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan(x) - x$.

(a) (2 v.) Verifique que f é estritamente crescente.

Resposta: Derivando, obtemos

$$f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$$

Temos que f é contínua e $f'(x) > 0$ se $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ pelo que f é estritamente crescente em $] - \infty, 0]$. Por um argumento semelhante, f é estritamente crescente em $[0, \frac{\pi}{2}[$. Logo f é estritamente crescente em $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(b) (1,5 v.) Estude a existência de pontos de inflexão no gráfico de f .

Resposta: Temos

$$f''(x) = 2 \tan(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

donde $f''(x) < 0$ se $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ e $f''(x) > 0$ se $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Concluimos que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f .

(c) (2 v.) Seja $f^{-1} : \mathbb{R} \mapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ a inversa de f para a composição de funções. Justifique que f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e calcule $(f^{-1})'(y_0)$.

Resposta: Temos que $f'(\pi/4) = \tan^2(\pi/4) = \frac{1}{2} \neq 0$ pelo que f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(\pi/4)$ e tem-se

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = 2$$

Grupo 3 – (Mude de folha)

(a) (2 v.) Aplique o Teorema do Valor Médio de Lagrange no intervalo $[0, a]$ à função $\ln(1+x)$ e conclua

$$\ln(1+a) < a \quad \forall a > 0$$

Resposta: Aplicando o Teorema do Valor Médio de Lagrange no intervalo $[0, a]$ temos

$$\frac{\ln(1+a) - \ln(1)}{a - 0} = \frac{1}{1+c}$$

em que $c \in]0, a[$. Concluimos que $\frac{1}{1+c} < 1$ e, posto que $a > 0$,

$$\ln(1+a) = \frac{a}{1+c} < a$$

o que prova o resultado.

(b) (2 v.) Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$, com derivada positiva. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln(f(b)) - \ln(f(a))} = f(c)$$

(sugestão: utilize o Teorema de Cauchy)

Resposta: Temos

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} > 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

pelo que estamos nas condições de aplicabilidade do Teorema de Cauchy. Concluimos que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln(f(b)) - \ln(f(a))} = \frac{f'(c)}{\frac{f'(c)}{f(c)}} = f(c)$$

o que demonstra o resultado.

Grupo 4 – (Mude de folha)

Recorde que a área de uma elipse com semi-eixos de comprimento x e y é dada por

$$A(x, y) = \pi \cdot x \cdot y \quad (x, y > 0)$$

Euler propôs a seguinte fórmula

$$P(x, y) = \pi \cdot \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

para a obtenção de um valor aproximado do perímetro de uma elipse.

(a) (1,5 v.) Justifique que, no caso de uma elipse com área π e com semi-eixo $x > 0$, a aproximação do perímetro formulada por Euler é dada pela função

$$P(x) = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \quad \text{com } x \in]0, +\infty[$$

Resposta: Temos que

$$A(x, y) = \pi \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x}$$

Substituindo em $P(x, y)$ concluímos que

$$P(x, 1/x) = \pi \cdot \sqrt{2 \left(x^2 + \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right)} = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

(b) (3 v.) Mostre que a função $P(x)$ definida na alínea anterior atinge o seu mínimo num único ponto $x_0 \in]0, +\infty[$ e interprete geometricamente o resultado.

Resposta: Derivando $P(x)$ obtemos

$$P'(x) = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} \cdot \left(2x - \frac{2}{x^3} \right)$$

O sinal da derivada é o sinal da expressão

$$2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3} \cdot (x^2 - 1)$$

pelo que P é estritamente decrescente em $]0, 1[$ e estritamente crescente em $]1, +\infty[$. Deste modo $P(x)$ atinge um mínimo absoluto num único ponto $x_0 = 1$. Nesse caso, tem-se que $y_0 = 1/x_0 = 1$ pelo que a elipse tem ambos os semi-eixos com comprimento unitário. É pois a circunferência de raio 1 que minimiza P na classe das elipses de área π .

Fim.