

Análise Matemática 1

Correcção Melhoria 3.º Teste

29 de Junho de 2018

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta indique, para cada item, qual a opção correcta.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Qual o valor de $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x e^{x^2} dx$?

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) $e^2 - 1$

2. Seja $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $v(0) = v'(0) = 1$. Qual o polinómio de Taylor de ordem 2 em $x = 0$ da função

$$\int_0^{\ln(1+x)} v(t) dt \quad ?$$

- (a) x (b) $x + \frac{x^2}{2}$ (c) $x + x^2$ (d) $x - \frac{x^2}{2}$

3. Indique qual das seguintes expressões resulta de $\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) dx$ após a mudança de variável $x = t^2$.

- (a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2t \cdot \cos(t) dt$ (b) $\int_0^1 \cos(\pi t) dt$
(c) $\int_0^{\pi} 2t \sin(t) dt$ (d) $2 \int_0^{\pi} t \cdot \cos(t) dt$

4. Seja $f : [0, 3] \mapsto \mathbb{R}$ uma função integrável tal que

$$\left| \int_0^3 f(x) dx \right| \geq 1$$

Qual das seguintes desigualdades é sempre verdadeira?

- (a) $|f(x)| \geq \frac{1}{3}, \quad \forall x \in [0, 3].$ (b) $\int_0^3 (f(x) + 1) dx \geq 4$
(c) $\int_0^3 f^2(x) dx \geq 1$ (d) $\int_0^3 (|f(x)| - 1) dx \geq -2$

5. O integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx$ é:

- (a) divergente. (b) convergente para 1.
(c) convergente para $\frac{4}{5}$. (d) convergente para 5.

Grupo 2 – (Mude de folha)

(a) (2,5 v.) Determine a primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$ que se anula em $x = 1$ indicando o intervalo em que se encontra definida.

Resposta: Escrevemos

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

Resolvendo um sistema, obtemos $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$ pelo que

$$\int \frac{1}{x^3 + x} dx = \int \frac{1}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \ln(|x|) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

A condição inicial de anulamento em $x = 1$ determina $c = \frac{\ln(2)}{2}$ e como domínio o intervalo $]0, +\infty[$.

(b) (2,5 v.) Utilize o método de integração por partes para calcular $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(x) dx$.

Resposta: Calculamos

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 \cdot \arcsin(x) dx = [x \cdot \arcsin(x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Temos

$$[x \cdot \arcsin(x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arcsin(\sqrt{2}/2) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

$$-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

Concluimos

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(x) dx = \frac{(\pi+4)\sqrt{2}}{8} - 1$$

Grupo 3 – (Mude de folha)

(a) (1,5 v.) Considere a função $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ em que $x \in [0, 1]$. Calcule

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

e interprete geometricamente este valor.

Resposta: Temos

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}$$

e este valor representa o comprimento do gráfico de f .

(b) (2,5 v.) Considere a função

$$h(x) = \cosh(x), \quad x \in [\ln(1/2), \ln(2)]$$

Justifique que a área S da superfície gerada por revolução do gráfico de h em torno do eixo das abcissas verifica

$$S = 4\pi \cdot \int_0^{\ln(2)} \cosh^2(x) dx$$

Resposta: Aplicando a fórmula para o cálculo de uma superfície de revolução, obtemos

$$S = \int_{\ln(1/2)}^{\ln 2} 2\pi \cosh(x) \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx$$

Temos

$$\sqrt{1 + \sinh^2(x)} = \sqrt{\cosh^2(x)} = \cosh(x)$$

Por outro lado, posto que $\ln(1/2) = -\ln 2$ e que a função $\cosh^2(x)$ é par, temos

$$S = 2 \int_0^{\ln(2)} 2\pi \cosh^2(x) = 4\pi \cdot \int_0^{\ln(2)} \cosh^2(x) dx$$

(c) (1 v.) Calcule S em que S foi definido na alínea anterior.

Resposta: Temos

$$S = 4\pi \cdot \int_0^{\ln(2)} \cosh^2(x) dx = \pi \cdot \int_0^{\ln(2)} e^{2x} + e^{-2x} + 2 dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x \right]_0^{\ln(2)}$$

ou

$$S = \pi \cdot \left(\frac{15}{8} - \ln 4 \right)$$

formulário: $S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$; $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$.

Grupo 4 – (Mude de folha)

(a) (2 v.) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange em $x = 0$ da função $\arctan(x)$ e conclua que

$$\arctan(x) < x \quad \forall x > 0$$

Será esta desigualdade verdadeira se $x < 0$? (justifique)

Resposta: Temos

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{e} \quad (\arctan)''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

logo, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, temos

$$\arctan(x) = \arctan(0) + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{-2c}{(1+c^2)^2} \cdot x^2$$

em que $c \in]0, x[$. Posto que $x > 0$, temos $c > 0$

$$\arctan(x) < x \quad \text{se} \quad x > 0$$

No caso $x < 0$, temos

$$\frac{-2c}{(1+c^2)^2} \cdot x^2 > 0$$

pelo que a desigualdade não é verdadeira (de facto, tem sentido contrário).

(b) (2 v.) Utilizando a alínea anterior, estude a convergência do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Resposta: O integral é impróprio porque o intervalo considerado é ilimitado. De facto, a função integranda (positiva) pode ser prolongada por continuidade em $x = 0$ pelo valor $\frac{\pi}{2}$. Temos,

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx + \int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Repare que

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \leq \frac{\pi}{2}$$

e, pela alínea anterior,

$$\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

pelo que o integral impróprio é convergente.

Fim.