FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado A

Análise Matemática I

2º Teste — 22 de Novembro de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & \text{se } |x| \leq 3 \\ 2, & \text{se } |x| > 3. \end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) $g'_d(3) = +\infty$ e $g'_e(3) = -\infty$.
(b) $g'_d(3) = 0$ e $g'_e(3) = -\infty$.
(c) $g'_d(-3) > 0$ e $g'_e(-3) > 0$.
(d) $g'_d(-3) = -\infty$ e $g'_e(-3) = +\infty$.

2. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Qual dos seguintes conjuntos não pode ser o contradomínio de H?

(a) $\mathbb{R}$.
(b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(c) $\mathbb{R}^-$.
(d) $]0,1[$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(x) = 1 + f(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Quantas raízes tem a equação $f'(x) = -1$? (Sugestão: use o Teorema de Lagrange)

(a) 0.
(b) 1.
(c) 2.
(d) Infinitas.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 e tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe c entre π e x tal que

$$f(x) = -e^{\pi} - e^{\pi}(x-\pi) - \frac{e^c}{3}\big(\operatorname{sen}(c) + \cos(c)\big)(x-\pi)^3.$$

Qual o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{f(x) + e^{\pi}(x-\pi+1)}{(x-\pi)^3}$?

(a) $-\dfrac{e^{\pi}}{3}$.

(b) $-\dfrac{e^c}{3}\big(\operatorname{sen}(c)+\cos(c)\big)$.

(c) $\dfrac{e^{\pi}}{3}$.

(d) $+\infty$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8x + 1$. Sabendo que $f'(1) = 0$, qual das seguintes afirmações é correcta? (Sugestão: use o Teorema de Rolle)

(a) f não pode ter mais de 2 zeros reais.

(b) f tem 4 zeros reais.

(c) f tem mais de 2 zeros reais.

(d) f tem 3 zeros reais.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[3.5 val.]** Calcule,justificando,

$$\lim_{x\to 0} (2-\cos(x))^{1/\log(x+1)}.$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \cos(x)$.

(a) **[2.0 val.]** Escreva a Fórmula de MacLaurin de f com resto de Lagrange de ordem 3.

(b) **[2.0 val.]** Utilizando a alínea anterior prove que

$$f(x) < 1 + x, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^3 - x^2), & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}x - \cos(x), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) **[1.0 val.]** Determine o domínio e estude a continuidade de f.

(b) **[2.0 val.]** Caracterize a função derivada de f.

(c) **[2.0 val.]** Estude a monotonia e extremos de f.

(d) **[2.5 val.]** Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}^-$.

FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Número de caderno

Análise Matemática I

2º Teste – 22 de Novembro de 2017

Folha de Respostas – Enunciado A

Nome:____

Número de Aluno:________________ Curso:____________________

	a)	b)	c)	d)
1.	☐	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☐

Folha nº 2

FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado B

Análise Matemática I

2º Teste — 22 de Novembro de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2}, & \text{se } |x| \leq 3 \\ 2, & \text{se } |x| > 3. \end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) $g'_d(3) = +\infty$ e $g'_e(3) = -\infty$.

(b) $g'_d(-3) = -\infty$ e $g'_e(-3) = +\infty$.

(c) $g'_d(3) = 0$ e $g'_e(3) = -\infty$.

(d) $g'_d(-3) > 0$ e $g'_e(-3) > 0$.

2. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Qual dos seguintes conjuntos não pode ser o contradomínio de H?

(a) $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R}^-$.

(c) $]0, 1[$.

(d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(x) = 1 + f(x + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Quantas raízes tem a equação $f'(x) = -1$? (Sugestão: use o Teorema de Lagrange)

(a) Infinitas.

(b) 0.

(c) 1.

(d) 2.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 e tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe c entre π e x tal que

$$f(x) = -e^{\pi} - e^{\pi}(x-\pi) - \frac{e^c}{3}\big(\operatorname{sen}(c) + \cos(c)\big)(x-\pi)^3.$$

Qual o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{f(x) + e^{\pi}(x-\pi+1)}{(x-\pi)^3}$?

(a) $-\dfrac{e^{\pi}}{3}$.

(b) $-\dfrac{e^c}{3}\big(\operatorname{sen}(c) + \cos(c)\big)$.

(c) $+\infty$.

(d) $\dfrac{e^{\pi}}{3}$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8x + 1$. Sabendo que $f'(1) = 0$, qual das seguintes afirmações é correcta? (Sugestão: use o Teorema de Rolle)

(a) f tem 4 zeros reais.

(b) f tem mais de 2 zeros reais.

(c) f não pode ter mais de 2 zeros reais.

(d) f tem 3 zeros reais.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[3.5 val.]** Calcule,justificando,

$$\lim_{x\to 0}(2-\cos(x))^{1/\log(x+1)}.$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \cos(x)$.

   (a) **[2.0 val.]** Escreva a Fórmula de MacLaurin de f com resto de Lagrange de ordem 3.

   (b) **[2.0 val.]** Utilizando a alínea anterior prove que

$$f(x) < 1 + x, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^3 - x^2), & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}x - \cos(x), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Determine o domínio e estude a continuidade de f.

   (b) **[2.0 val.]** Caracterize a função derivada de f.

   (c) **[2.0 val.]** Estude a monotonia e extremos de f.

   (d) **[2.5 val.]** Usando o Teorema de Taylor determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}^-$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Número de caderno

Análise Matemática I

2º Teste – 22 de Novembro de 2017

Folha de Respostas – Enunciado B

Nome:____

Número de Aluno:____________________ Curso:____________________________

	a)	b)	c)	d)
1.	☐	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☐

Folha nº 2