Análise Matemática 1 - Correção 2.º Teste

16 de Maio de 2018

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1 - Versão A

Na folha do caderno assinale Versão A e indique para cada item a opção correcta.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Considere a função diferenciável em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(e^{-2x})$. Qual das seguintes rectas é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$?

(a) $y = -x + \frac{\pi}{4}$ (b) $y = x$ (c) $y = -2x + \frac{\pi}{4}$ (d) $y = \frac{\pi}{2}$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$. Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

(b) f tem um mínimo relativo em $x = 0$.

(c) f é estritamente crescente em $] -\infty, 3]$.

(d) f tem um máximo relativo em $x = 0$.

3. Qual das seguintes funções (definidas em $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) tem como derivada a função $\tan(x)$?

(a) $F_1(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$ (b) $F_2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

(c) $F_3(x) = \ln(\cos(x))$ (d) $F_4(x) = \ln(\cos^2(x))$

4. Seja f uma função injectiva, diferenciável numa vizinhança de $x = 0$, tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$. Considere a função $g(y) = e^{f^{-1}(y)}$ em que f^{-1} é a inversa de f para a composição de funções. Podemos afirmar que:

(a) $g'(0) = \frac{1}{2}$ **(b)** $g'(1) = \frac{1}{2}$ (c) $g'(1) = \frac{e}{2}$ (d) $g'(0) = \frac{1}{f'(1)}$.

5. Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$ tais que $f(b) = 2g(b)$, $f(a) = 2g(a)$. Supomos que $g(b) \neq g(a)$ e que $g'(x) \neq 0$ para todo o $x \in]a, b[$. O teorema de Cauchy permite afirmar que:

(a) Existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$

(b) Existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 2g'(c)$

(c) g é estritamente crescente em $[a, b]$

(d) Existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) > 0$.

Grupo 2 – (Mude de folha)

Considere a função contínua $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ x^2 \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) (2,5 v.) Verifique que

$$f'(x) = x \cdot (2 \ln(x) + 1) \quad \text{para } x > 0$$

e determine os extremos de f , indicando se são extremos relativos ou absolutos.

Resposta: Temos, para $x > 0$,

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln(x) + 1).$$

Temos

$$2 \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}$$

$$2 \ln(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in]0, e^{-\frac{1}{2}}[$$

pelo que f é estritamente decrescente em $[0, e^{-\frac{1}{2}}]$ e estritamente crescente em $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

Concluimos que f tem um mínimo absoluto em $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ (ou f assume valores positivos), f tem um máximo relativo em $x = 0$ que não é máximo absoluto.

(b) (2,5 v.) Averigúe a existência de pontos de inflexão de f .

Resposta: Derivamos f' e obtemos, para $x > 0$,

$$f''(x) = (x \cdot (2 \ln(x) + 1))' = 2 \ln(x) + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln(x) + 3$$

Temos

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$$

e, posto que f'' troca de sinal em $x = e^{-\frac{3}{2}}$, concluimos que se trata de um ponto de inflexão de f .

Grupo 3 – (Mude de folha)

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) (3 v.) Verifique que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^2}$$

e estude a diferenciabilidade de f em $x = 0$.

Resposta:

Temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\sin(2x)}{x} - 2}{x} = \frac{\sin(2x) - 2x}{x^2}$$

A função f é diferenciável em $x = 0$ caso exista o limite desta expressão quando x tende para zero. Trata-se de uma indeterminação de tipo infinitésimo a dividir por infinitésimo pelo que podemos aplicar a Regra de Cauchy. Temos então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x) - 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin(2x)}{2} = 0$$

Logo a função é diferenciável em $x = 0$ e tem derivada nula.

(b) (2 v.) Justifique que f' tem pelo menos dois zeros no intervalo $] \pi, 2\pi[$.

Resposta:

Temos que

$$f(\pi) = f(3\pi/2) = f(2\pi) = 0$$

A função f cumpre as condições do Teorema de Rolle nos intervalos $[\pi, 3\pi/2]$ e $[3\pi/2, 2\pi]$. Logo existem $c_1 \in]\pi, 3\pi/2[$ e $c_2 \in]3\pi/2, 2\pi[$ tais que

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$

Se o aluno utilizar o teorema de Rolle mas apenas detectar uma raiz da derivada, é atribuído 1 valor de cotação. Se o aluno tentar de modo consistente mas sem sucesso a utilização do Teorema de Bolzano com f' atribui-se até 0,5 valores de cotação.

Grupo 4 – (Mude de folha)

Considere um ponto P na esfera unitária de $\mathbb{R}^3$ com coordenadas $(x, x, \sqrt{1 - 2x^2})$ em que $x \in]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$. Considere o paralelepípedo com vértice em P e simétrico em relação aos planos coordenados.

(a) (1 v.) Justifique que o volume do paralelepípedo é dada pela expressão

$$V(x) = 8x^2 \sqrt{1 - 2x^2}$$

Resposta: O volume de um paralelepípedo é dado por

$$V(x) = (2x) \cdot (2x) \cdot (2\sqrt{1 - 2x^2}) = 8x^2 \sqrt{1 - 2x^2}$$

(área da base quadrada de lado $2x$ pela altura $2\sqrt{1 - 2x^2}$).

(b) (3 v.) Determine o valor de x para o qual $V(x)$ é máximo.

Calculamos, para $x \in]0, \sqrt{2}/2[$,

$$V'(x) = 16x\sqrt{1-2x^2} + 8x^2 \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{16x}{\sqrt{1-2x^2}} \cdot (1-3x^2)$$

A função atinge um máximo para este valor uma vez que é estritamente crescente em $]0, \frac{\sqrt{3}}{3}[$ e estritamente decrescente em $] \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$.

Fim.