Análise Matemática 1 - Correcção 1º Teste

Abril 2018

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Em cada alínea, indique qual a opção correcta. Apresente os cálculos efectuados.

1. Considere o conjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que

$$B = [\,0\,,\,e\,[\, \cup \left\{ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Podemos afirmar que:

(a) $Fr(B) = \{0, e\} \ \cup \ \left\{ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

<u>**(b)**</u> $B' = [\,0\,,\,e] \cup \{e^2\}$

(c) $e^2 \in Ext(B)$

(d) $B \cap]-1, 1[$ é aberto.

2. Considere as sucessões reais

$$x_n = \sin(\pi/(2n)) \quad \text{e} \quad y_n = \frac{n^2}{n+1}$$

Podemos afirmar que:

(a) a sucessão x_n/y_n converge para 1.

(b) (x_n) é convergente e (y_n) é limitada.

(c) $0 \leq x_n \leq y_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(d) a sucessão $x_n \cdot y_n$ converge para $\frac{\pi}{2}$.

3. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

(a) a função definida por $u(x) \cdot |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) a função definida por $(u(x) - u(x-1)) \cdot |x|$ não é limitada em $\mathbb{R}$.

(c) a função definida por $1 - u(x)$ é crescente em $\mathbb{R}$.

(d) a função definida por $u(x) \cdot u(-x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{-1}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Podemos afirmar que:

(a) f admite prolongamento por continuidade em $x = 0$ e o seu contradomínio é um conjunto ilimitado.

(b) f admite prolongamento por continuidade em $x = 0$ e o seu contradomínio é um conjunto limitado.

(c) f não tem limite em $x = 0$.

(d) f não tem limite quando x tende para $+\infty$.

5. Podemos afirmar que a expressão $g(x) = \tan\left(\frac{1-x}{x}\right)$:

(a) Está definida em $]0, +\infty[$ e admite neste intervalo função inversa com expressão $g^{-1}(y) = \frac{1}{1+\arctan(y)}$.

(b) Está definida em $[1, +\infty[$ e admite neste intervalo função inversa com expressão $g^{-1}(y) = \arctan(1 + \frac{1}{y})$.

(c) Está definida em $[1, +\infty[$ e admite neste intervalo função inversa com expressão $g^{-1}(y) = \frac{1}{1+\arctan(y)}$.

(d) Está definida em $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ mas não admite neste domínio função inversa.

Grupo 2

(a) (2,5 v.) Mostre que a sucessão $a_n=\sqrt{2n+4}-\sqrt{2n}$ é um infinitésimo.

Resposta: Escrevemos

$$u_n=\sqrt{2n+4}-\sqrt{2n}=\frac{4}{\sqrt{2n+4}+\sqrt{2n}}$$

Posto que

$$\lim\sqrt{2n+4}+\sqrt{2n}=+\infty$$

concluímos que (u_n) é um infinitésimo.

(b) (2,5 v.) Calcule o limite da sucessão $b_n=\dfrac{n^4+n^3\ln(n)}{2n(n^3\cos\left(\frac{1}{n}\right)+n^{\frac{5}{2}})}$

Resposta: Escrevemos

$$b_n=\frac{n^4+n^3\ln(n)}{2n(n^3\cos\left(\frac{1}{n}\right)+n^{\frac{5}{2}})}=\frac{1+\ln(n)/n}{2\cos\left(\frac{1}{n}\right)+n^{-\frac{1}{2}}}$$

Temos que:

$$\lim\ln(n)/n=0,\qquad\lim n^{-\frac{1}{2}}=0$$

e $\lim\cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$

Logo

$$\lim b_n=\frac{1}{2}$$

Grupo 3

Considere a sucessão definida por

$$u_1=1\,,\qquad u_{n+1}=\frac{u_n}{2+\frac{1}{n}}$$

(a) (2,5 v.) Prove por indução que

$$0\leq u_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

Resposta:

Temos $u_1 = 1 \leq \frac{1}{2^0}$ pelo que a base de indução é verificada. Verifiquemos que a propriedade é indutiva. Supondo que

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

provemos que

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$$

Temos

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + \frac{1}{n}}$$

Por hipótese de indução, temos

$$0 \leq \frac{u_n}{2 + \frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{2 + \frac{1}{n}} < \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

pelo que a propriedade é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) (2,5 v.) Mostre que a sucessão $w_n = u_1 + \cdots + u_n$ é convergente.

(sugestão: recorde que, para $r \neq 1$, tem-se $1 + r + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ e verifique que (w_n) é uma sucessão limitada).

Resposta: Temos, pela alínea anterior, $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Logo, aplicando a fórmula dos termos de uma sucessão geométrica,

$$w_n \leq 1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2$$

(Se o aluno referir que o limite de $\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$ é 2 também é dada toda a cotação).

Temos $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} \geq 0$ logo (w_n) é monótona. Concluímos que (u_n) é uma sucessão monótona e limitada logo é convergente.

Grupo 4

Considere a função real de variável real $f : [0, e-1] \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x + \ln(x+1)$$

(a) Mostre que f é injectiva e que o seu contradomínio é o intervalo $[0, e]$.

Resposta: A função f é a soma de duas funções estritamente crescentes logo é injectiva. A função f é contínua em $[0, e-1]$ pelo que, pelo Teorema de Weierstrass,

$$f([0, e-1]) = [\min f, \max f] = [f(0), f(e-1)] = [0, e]$$

Nota: um argumento formulado correctamente recorrendo ao Teorema de Bolzano tem toda a cotação.

(b) Mostre que a equação

$$f^{-1}(x) = \cos(x)$$

(em que f^{-1} é a inversa de f para a composição de funções) admite uma e uma só solução em $]0, e[$.

Resposta:

A função f^{-1} é estritamente crescente e contínua em $[0, e]$ por um resultado teórico.
A função $(-\cos(x))$ é estritamente crescente e contínua em $[0, e]$ pois $e < \pi$.
Logo $f^{-1}(x) - \cos(x)$ é éstritamente monótona .

Temos

$$f^{-1}(0) - \cos(0) = -1 < 0 \qquad \text{e} \qquad f^{-1}(e) - \cos(e) > e - 2 > 0$$

Pelo Teorema de Bolzano e pela monotonia de $f^{-1}(x) - \cos(x)$, a solução existe e é única.