Análise Matemática 1 - Correcção 3.º Teste

12 de Junho de 2018

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1 - Versão A

Na folha de resposta **assinale Versão A** **e indique, para cada item, qual a opção correcta.**

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Qual o valor de $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\, dx$?

(a) 1   **(b)** 2 (c) π (d) e^2

2. Seja $f : [0,2] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f(x)| \leq 3$ para todo o $x \in [0,2]$. Indique qual das seguintes afirmações é sempre verdadeira:

(a) $-6 \leq \displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx \leq 6$.

(b) $\left|\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx\right| = \displaystyle\int_0^2 |f(x)|\, dx$.

(c) $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{f(t)}\, dt$ está definida e é diferenciável para todo o $x \in]0,2[$.

(d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+f^2(x)}\, dx > \frac{1}{5}$.

3. Sabendo que os polinómios de Taylor de ordem 3 no ponto $x = 0$ das funções $\ln(1+x)$ e $\cos(x)$ são respectivamente

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \qquad \text{e} \qquad q(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

qual o polinómio de Taylor de ordem 3 da função $\ln(1+2x) \cdot \cos(x)$?

(a) $2x - 2x^2 + \frac{5}{3}x^3$ (b) $x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$ (c) $2x - 2x^2$ (d) $x - \frac{1}{3}x^3$

4. Qual a derivada da função definida em $\mathbb{R}$ por $H(x) = \displaystyle\int_0^{\cos(3x)} e^{1-t^2}\, dt$?

(a) $e^{\sin^2(3x)}$

(b) $e^{1-\cos^2(3x)} \cos(3x)$

(c) $(-3) \cdot e^{\sin^2(3x)} \cdot \sin(3x)$

(d) $-\frac{1}{3} \cdot e^{\sin^2(3x)} \cdot \sin(3x)$

5. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{x^2}\, dx$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) O integral impróprio é convergente para todo o $k \in \mathbb{R}$.

(b) O integral impróprio é simplesmente convergente para $k \leq 0$ e absolutamente convergente para $k > 0$.

(c) O integral impróprio é divergente para todo o $k \in]-\infty, 0]$ e absolutamente convergente para $k > 0$.

(d) O integral impróprio é absolutamente convergente para $k \geq 0$ e divergente se $k < 0$.

Grupo 2 – (Mude de folha)

(a) (2 v.) Determine a primitiva de $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+x-6}$ que se anula em $x = 1$ indicando o intervalo em que se encontra definida.

Resposta: Decompomos a função racional em fracções parciais na forma

$$\frac{5x}{x^2+x-6} = \frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$$

A resolução de um sistema dá-nos $a = 2$ e $b = 3$. Concluímos que

$$\int \frac{5x}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3}\,dx = 2\ln(|x-2|) + 3\ln(|x+3|) + c$$

Pretendemos determinar a primitiva F de f tal que $F(1) = 0$ ou seja

$$2\ln(1) + 3\ln(4) + c = 0$$

ou seja $c = -3\ln 4$. O domínio da primitiva é o intervalo $]-3, 2[$.

(b) (3 v.) Pretendemos determinar o valor $I = \displaystyle\int_0^9 e^{2\sqrt{x}}\,dx$.

Utilizando a mudança de variável $\sqrt{x} = t$ mostre que

$$I = \int_0^3 2te^{2t}\,dt$$

e calcule I.

Resposta: A mudança de variável sugerida implica

$$x = t^2\,, \quad \frac{dx}{dt} = 2t \quad \text{com} \quad t \in [0,3]$$

pelo que, pelo Teorema da Mudança de Variável no integral, tem-se

$$I = \int_0^3 2te^{2t}\,dt$$

Integrando por partes:

$$I = \int_0^3 2te^{2t}\,dt = \left[te^{2t}\right]_0^3 - \int_0^3 e^{2t}\,dt = 3e^6 - \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^3 = \frac{5}{2}e^6 + \frac{1}{2}$$

Grupo 3 – (Mude de folha)

a) (1 v.) Considere a função $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ em que $x \in [0,1]$. Verifique que

$$\int_0^1 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \frac{\pi}{6}\int_0^1 4x^3\sqrt{1+x^4}\,dx$$

e indique o significado geométrico deste integral.

Resposta: Temos $f'(x) = x^2$ pelo que

$$\int_0^1 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{2\pi}{3}\sqrt{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{6}\int_0^1 4x^3\sqrt{1+x^4}\,dx$$

O valor deste integral representa *a área da superfície gerada por revolução do gráfico de f em torno do eixo das abcissas*

(Alternativamente: a área da superfície lateral do sólido gerado por revolução região

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x\in[0,1] \quad \text{e} \quad 0\le y\le \frac{1}{3}x^3\}$$

em torno do eixo das abcissas.)

(b) (2 v.) Determine o valor do integral da alínea anterior.

Resposta: A função integranda admite uma primitiva imediata:

$$\frac{\pi}{6}\int_0^1 4x^3\sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$$

(c) (2 v.) Calcule o volume V do sólido obtido por rotação da região

$$D = \left\{(x,y) : 0\le x\le \frac{\pi}{4}, \quad 0\le y\le \frac{1}{\cos(x)}\right\}$$

em torno do eixo dos x.

formulário: $V(R_x) = \int_a^b \pi h^2(x)\,dx$, $V(R_y) = \int_a^b 2\pi x h(x)\,dx$.

Resposta: O volume da sólido pretendido é-nos dado por

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{\cos^2(x)}\,dx = \pi\left[\tan(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi$$

Grupo 4 – (Mude de folha)

Considere a função infinitamente diferenciável $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1+e^x)$.

(a) (1 v.) Verifique que $f''(x) = \dfrac{1}{2+e^x+e^{-x}}$.

Resposta: Calculamos

$$f''(x) = \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)' = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} = \frac{1}{2+e^x+e^{-x}}$$

(b) (2 v.) Utilizando a alínea anterior e uma fórmula de Taylor de ordem maior ou igual a 1 com resto de Lagrange em $a = 0$, mostre que, para todo o $x\in\mathbb{R}$

$$f(x) \le \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$$

Resposta: Recordamos que a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange em $a = 0$ é dada por

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2!}x^2$$

em que $c \in]0, x[$. Utilizando a alínea anterior, temos, para todo o $x \in \mathbb{R}$

$$\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 + e^c + e^{-c}}x^2$$

Temos, para todo o $c \in \mathbb{R}$,

$$e^c + e^{-c} = 2\cosh(c) \geq 2\cosh(0) = 2$$

Logo

$$\frac{1}{2 + e^c + e^{-c}} \leq \frac{1}{4}$$

Posto que $x^2 \geq 0$, temos para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln(1 + e^x) \leq \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}x^2$$

Resolução alternativa: Utilizando a fórmula de Taylor de ordem 2, obtemos

$$\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}x^2 + -\frac{2\sinh(c)}{(2 + 2\cosh(c))^2} \cdot \frac{x^3}{3!}$$

Observamos que, se $x \neq 0$ então c tem o mesmo sinal que x pelo que

$$-2\sinh(c) \cdot x^3 < 0$$

Concluímos que o resto de Lagrange é sempre negativo.

(c) (1 v.) Utilizando a alínea anterior, mostre que $\int_0^2 f(x)\,dx \leq \ln 4 + \frac{4}{3}$.

Resposta: Temos

$$\int_0^2 \ln(1+e^x)\,dx \leq \int_0^2 \ln 2+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}x^2\,dx = \left[x\ln 2 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{24}x^3\right]_0^2 = 2\ln 2+1+\frac{1}{3} = \ln 2^2+\frac{4}{3}$$

Fim.