Análise Matemática 1 - Correcção Exame final

7 de Janeiro de 2019

Duração: 3h 00m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta: 1 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,3) v.)

1. Considere o conjunto $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n \cdot n^2}{n^2+1} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) $A' = \{-1, 1\}$.

(b) $Ext(A)$ é fechado.

(c) $A' = Fr(A)$.

(d) $A = Fr(A)$.

2. Indique qual das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ tem limite em $x = 0$.

(a) $f_1(x) = \dfrac{\sin(x)}{|x|}$ (b) $f_2(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ (c) $f_3(x) = |x|^{\frac{1}{4}} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
(d) $f_4 = \lfloor x \rfloor$

(Recorde: $\lfloor x \rfloor$ representa a parte inteira de x)

Grupo 2 – (Mude de folha)

(a) (1 v.) Determine o limite das seguintes sucessões:

$$a_n = ne^{\frac{3}{n}} - n \qquad\qquad b_n = \frac{\arctan(n)\cdot n^2 + n}{\sqrt{4n^4 + \ln(n^5+1)}}$$

Resposta:
Temos

$$\lim a_n = \lim n(e^{\frac{3}{n}} - 1) = \lim \frac{e^{\frac{3}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 3 \cdot \lim \frac{e^{\frac{3}{n}} - 1}{\frac{3}{n}} = 3$$

$$\lim b_n = \lim \frac{\arctan(n) + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \ln(n^5+1)/n^4}} = \frac{\pi}{4}$$

posto que $\lim \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim \ln(n^5+1)/n^4 = 0$.

(b) (1 v.) Considere a função função real de variável real, definida em $[1, +\infty[$ por

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \in [1,\, +\infty[$$

Justifique que f é injectiva e caracterize a sua inversa para a composição de funções, indicando o respectivo domínio e contradomínio.

Resposta: A função f é a composição da função estritamente decrescente em $[1, +\infty[$ $a(x) = \frac{1}{x}$ com a função estritamente crescente em $[-1, 1]$ $b(y) = \arcsin(y)$, sendo por isso uma função estritamente decrescente.

Posto que $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{y\to 0} \arcsin(y) = 0$ temos, pela continuidade de f, que o seu contradomínio é $]0, \frac{\pi}{2}]$. Finalmente, resolvemos

$$y = \arcsin(1/x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sin(y)}$$

e concluímos que

$$f^{-1} : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [1, +\infty[, \qquad f^{-1}(y) = \frac{1}{\sin(y)}$$

Grupo 3 – (Mude de folha)

Considere a função h, definida em $[1, 3]$, por $h(x) = x - \ln x + 1$. Sabemos que h é crescente no seu domínio e que

$$|h(x) - h(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y| \qquad \forall x, y \in [1, 3]$$

(a) (0,8 v.) Justifique que o contradomínio de h é um intervalo fechado contido em $[1, 3]$.

Resposta: A função h é contínua, crescente em $[1,3]$, pelo que o seu contradomínio é, pelo Teorema de Bolzano, $[h(1),h(3)]$. Ora

$$h(1) = 2 > 1 \qquad \text{e} \qquad h(3) = 3 - \ln(3) + 1 < 3$$

posto que $\ln(3) > \ln(e) = 1$.

(b) (1,2 v.) Considere a sucessão definida por recorrência por

$$u_1 = 3\,, \qquad u_{n+1} = h(u_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Utilizando a alínea anterior, prove que $u_n \in [1,3]$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e conclua que u_n é convergente. Indique o limite de (u_n).

Resposta: Temos $u_1 = 3 \in [1,3]$. Supomos, por hipótese, que $u_n \in [1,3]$. Então, pela alínea anterior, $u_{n+1} = h(u_n) \in [1,3]$. Logo a propriedade é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |h(u_{n+1}) - h(u_n)| \leq \frac{2}{3}|u_{n+1} - u_n|$$

Por um resultado teórico, concluímos que u_n é uma sucessão de Cauchy, logo converge.

Seja l o limite de u_n. Necessáriamente $l \in [1,3]$. Temos, passando ao limite a fórmula de recorrência

$$l = l - \ln(l) + 1$$

ou seja

$$\ln(l) = 1 \qquad \text{ou} \qquad l = e$$

Grupo 4

Na folha de resposta do Grupo 4 indique, para cada item, qual a opção correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta: 1 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,3) v.)

1. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x = 0$ tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$. Qual das seguintes rectas é tangente ao gráfico da função

$$g(x) = \ln(f(x) + 1)$$

no ponto de abcissa $x = 0$?

(a) $y = -x + \ln(2)$ (b) $y = \frac{x}{2} + \ln(2)$ (c) $y = \ln(2) \cdot x$ <u>(d)</u> $y = x + \ln(2)$

2. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \arctan(x - 1)$. Podemos afirmar que:

(a) O gráfico de g não tem pontos de inflexão.

(b) $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de g.

<u>(c)</u> $(1, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico de g.

(d) $(0, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico de g.

Grupo 5 – (Mude de folha)

Considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-\sqrt{3}\cdot x} \sin(x)$.

(a) (1,5 v.) Estude a existência de extremos de f no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Resposta: Derivamos

$$f'(x) = -\sqrt{3} \cdot e^{-\sqrt{3}x} \sin(x) + e^{-\sqrt{3}x} \cos(x) = e^{-\sqrt{3}x} \cos(x) \left(-\sqrt{3} \tan(x) + 1\right)$$

Donde

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad \tan(x) < \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{e} \qquad f'(x) < 0 \quad \text{se} \quad \tan(x) > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

donde f é estritamente crescente em $]0, \frac{\pi}{6}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$. Concluímos que, no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, f atinge um máximo em $x = \frac{\pi}{6}$.

(b) (1 v.) Utilizando o Teorema de Rolle, mostre que a equação

$$f(x) + xf'(x) = 0$$

tem infinitas soluções.

(sugestão: observe que $(x \cdot f(x))' = f(x) + xf'(x)$)

Resposta: A função $h(x) = x \cdot f(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e temos $h(k\pi) = 0$ para todo o $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando o Teorema de Rolle num intervalo de tipo $[k\pi, (k+1)\pi]$, concluímos a existência de $c_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tal que

$$h'(c_k) = f(c_k) + c_k f'(c_k) = 0$$

donde resulta a infinidade de soluções.

Grupo 6 – (Mude de folha)

(a) (1,5 v.) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 em $x = 1$ da função $f(x) = \sqrt{x+3}$, com resto de Lagrange, e conclua que

$$\sqrt{x+3} > \frac{7}{4} + \frac{x}{4} - \frac{(x-1)^2}{4^3} \qquad \text{se} \quad x > 1$$

Resposta: Temos, para um certo $c \in]1, x[$,

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)_{x=1} (x-1) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{4\sqrt{(x+3)^3}}\right)_{x=c} (x-1)^2$$

ou

$$\sqrt{x+3} = 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{(c+3)^3}} \cdot (x-1)^2$$

Posto que $c > 1$, temos

$$\frac{1}{4\sqrt{(c+3)^3}} < \frac{1}{4 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}$$

donde, dado que $(x-1)^2 > 0$,

$$\sqrt{x+3} > 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot 4^{\frac{3}{2}}} \cdot (x-1)^2 = \frac{7}{4} + \frac{x}{4} - \frac{(x-1)^2}{4^3}$$

(b) (1 v.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\cosh(x))}{x}$ (recorde: $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$)

Resposta: Temos $\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty$, pelo que podemos aplicar a regra de Cauchy. A existência de limite L para a razão das derivadas garante que o limite estudado será L. Deste modo, derivando numerador e denominador, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\cosh(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

Grupo 7

Na folha de resposta do Grupo 7 indique, para cada item, qual a opção correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta: 1 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,3) v.)

1. Qual dos seguintes integrais permite calcular a área da região do plano delimitada inferioremente pelo gráfico $y = |x|$ e delimitada superiormente pelo círculo trigonométrico?

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} - |x|\, dx$ (b) $\displaystyle 2 \cdot \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} - x\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} - |x|\, dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} - |x|\, dx$

2. Seja F a primitiva da função $f(x) = e^x \cdot \sin(e^x)$ que se anula em $x = \ln(\pi)$. Qual o valor de $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$?

(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2

Grupo 8 – (Mude de folha)

(a) (1 v.) Determine a primitiva F de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$ que verifica $F(-1) = 2$.

Resposta: Temos

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+2} = \frac{x}{(x+1)^2+1} = \frac{x+1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

Donde

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \ln((x+1)^2+1) - \arctan(x+1) + c$$

A condição $F(-1) = 2$ determina $c = 2$.

(b) (1,5 v.) Calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2x^3 e^{-x^2}\,dx$.

(sugestão: note que $\int_a^b x^2 \cdot 2xe^{-x^2}\,dx$ pode ser integrado por partes)

Temos

$$\int_0^M x^2 \cdot 2xe^{-x^2}\,dx = [-x^2e^{-x^2}]_0^M + \int_0^M 2xe^{-x^2}\,dx = [-x^2e^{-x^2} - e^{-x^2}]_0^M = -M^2e^{M^2} - e^{-M^2} + 1$$

Concluímos que

$$\int_0^M x^2 \cdot 2xe^{-x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} -M^2e^{-M^2} - e^{-M^2} + 1 = 1$$

Grupo 9 – (Mude de folha)

(a) (1,5 v.) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,dx$ (sugestão: utilize a mudança de variável $\sqrt{x+1} = t$).

Resposta: Supondo $\sqrt{x+1} = t$, temos $x = t^2 - 1$ e $\dfrac{dx}{dt} = 2t$. Temos então, pelo teorema de mudana de variável no integral,

$$\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_0^1 (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt = \int_0^1 2t^4 - 2t^2\,dt = \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15}$$

(b) (1 v.) Seja $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua tal que que

$$\int_0^{x^2} f(\sqrt{t})dt = x^3$$

Derive ambos os membros desta igualdade em $x > 0$ e determine a função f.

Resposta: Derivando ambos os membros da igualdade em $x > 0$, temos

$$f(\sqrt{x^2}) \cdot 2x = 3x^2$$

logo

$$f(x) = \frac{3}{2}x \qquad \text{se} \quad x > 0$$

Como f é contínua em $x = 0$, concluímos que $f(x) = \frac{3}{2}x$ no seu domínio.

Fim.