

Análise Matemática 1 - Correção M. 1.º Teste

7 de Janeiro 2019

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Considere o conjunto $A = \left\{ \frac{(-1)^n \cdot n^2}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) $A' = \{-1, 1\}$.

(b) $\text{Ext}(A)$ é fechado.

(c) $A' = \text{Fr}(A)$.

(d) $A = \text{Fr}(A)$.

2. Considere a sucessão $u_n = 2n (\ln(n+1) - \ln(n))$. Podemos afirmar que:

(a) $\lim u_n = 0$ (b) $\lim u_n = 1$ (c) $\lim u_n = 2$ (d) $\lim u_n = e^2$

3. Indique qual das seguintes funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tem limite em $x = 0$.

(a) $f_1(x) = \frac{\sin(x)}{|x|}$ (b) $f_2(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ (c) $f_3(x) = |x|^{\frac{1}{4}} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$
(d) $f_4 = \lfloor x \rfloor$

(Recorde: $\lfloor x \rfloor$ representa a parte inteira de x)

4. Considere a função de variável real de domínio $I =]0, +\infty[$ definida por

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

Seja $B = f(I)$ o contradomínio de f . Podemos afirmar que:

- (a) $0 \in Fr(B)$ (b) B é limitado (c) B é aberto (d) B é fechado

5. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 2x^2$ e seja $\epsilon > 0$. Indique qual das seguintes vizinhanças V de 0 verifica, para todo o ϵ considerado,

$$x \in V \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(0)| < \epsilon^2$$

- (a) $] -10^{-5}, 10^{-5}[$ (b) $] -\epsilon^2, \epsilon^2[$ (c) $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon \right[$ (d) $\left] -\frac{3}{4}\epsilon, \frac{3}{4}\epsilon \right[$

Grupo 2 – (Mude de folha)

- (a) (2,5 v.) Determine o limite das seguintes sucessões:

$$a_n = ne^{\frac{3}{n}} - n \qquad b_n = \frac{\arctan(n) \cdot n^2 + n}{\sqrt{4n^4 + \ln(n^5 + 1)}}$$

Resposta:
Temos

$$\lim a_n = \lim n(e^{\frac{3}{n}} - 1) = \lim \frac{e^{\frac{3}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 3 \cdot \lim \frac{e^{\frac{3}{n}} - 1}{\frac{3}{n}} = 3$$

$$\lim b_n = \lim \frac{\arctan(n) + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \ln(n^5 + 1)/n^4}} = \frac{\pi}{4}$$

posto que $\lim \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim \ln(n^5 + 1)/n^4 = 0$.

- (b) (1 v.) Mostre que

$$2^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(sugestão: eleve ambos os membros da inequação à potência n)

Resposta: Elevando a expressão à potência n , obtemos

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Esta desigualdade é verdadeira pois a sucessão $e(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ verifica $e(1) = 2$ e é estritamente crescente. Concluimos que a desigualdade considerada é verdadeira.

(c) (1,5 v.) Utilizando a desigualdade da alínea anterior, prove por indução

$$2 + 2^{\frac{1}{2}} + \dots + 2^{\frac{1}{n}} \leq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: A desigualdade é verdadeira para $n = 1$. Admitimos a desigualdade verdadeira para n .

Verifiquemos que a propriedade é indutiva:

$$2 + 2^{\frac{1}{2}} + \dots + 2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{1}{n+1}} \leq 2n + 2^{\frac{1}{n+1}} \leq 2n + 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2n + 2 = 2(n+1)$$

Utilizamos sucessivamente a hipótese de indução, a desigualdade da alínea anterior e a majoração $1 + \frac{1}{n+1} \leq 2$.

Grupo 3 – (Mude de folha)

Considere a função f de variável real, definida em $[1, +\infty[$ por $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a) (2 v.) Justifique que f é injectiva e caracterize a sua inversa para a composição de funções, indicando o respectivo domínio e contradomínio.

Resposta: A função f é a composição da função estritamente decrescente em $[1, +\infty[$ $a(x) = \frac{1}{x}$ com a função estritamente crescente em $[-1, 1]$ $b(y) = \arcsin(y)$, sendo por isso uma função estritamente decrescente.

Posto que $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{y \rightarrow 0} \arcsin(y) = 0$ temos, pela continuidade de f , que o seu contradomínio é $]0, \frac{\pi}{2}]$. Finalmente, resolvemos

$$y = \arcsin(1/x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sin(y)}$$

e concluimos que

$$f^{-1} : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [1, +\infty[, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{\sin(y)}$$

(b) (1 v.) Resolva a equação $\tan(f(x)) = 1$.

Resposta: Resolvemos

$$f(x) = \arctan(1) \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin(1/x) = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2}$$

(c) (2 v.) Utilizando a mudança de variável $x = \frac{1}{\sin(y)}$ calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x)$$

Resposta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin(y)} \cdot f\left(\frac{1}{\sin(y)}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sin(y)} = 1$$

Na última igualdade utilizámos o limite notável da função $\sin(y)/y$ em $y = 0$.

Grupo 4 – (Mude de folha)

Considere a função h , definida em $[1, 3]$, por $h(x) = x - \ln x + 1$. Sabemos que h é crescente no seu domínio e que

$$|h(x) - h(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y| \quad \forall x, y \in [1, 3]$$

(a) (1,5 v.) Justifique que o contradomínio de h é um intervalo fechado contido em $[1, 3]$.

Resposta: A função h é contínua, crescente em $[1, 3]$, pelo que o seu contradomínio é, pelo Teorema de Bolzano, $[h(1), h(3)]$. Ora

$$h(1) = 2 > 1 \quad \text{e} \quad h(3) = 3 - \ln(3) + 1 < 3$$

posto que $\ln(3) > \ln(e) = 1$.

(b) (1,5 v.) Considere a sucessão definida por recorrência por

$$u_1 = 3, \quad u_{n+1} = h(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Utilizando a alínea anterior, prove que $u_n \in [1, 3]$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e conclua que u_n é convergente.

Resposta: Temos $u_1 = 3 \in [1, 3]$. Supomos, por hipótese, que $u_n \in [1, 3]$. Então, pela alínea anterior, $u_{n+1} = h(u_n) \in [1, 3]$. Logo a propriedade é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |h(u_{n+1}) - h(u_n)| \leq \frac{2}{3}|u_{n+1} - u_n|$$

Por um resultado teórico, concluímos que u_n é uma sucessão de Cauchy, logo converge.

(c) (1 v.) Determine $\lim u_n$.

Seja l o limite de u_n . Necessariamente $l \in [1, 3]$. Temos, passando ao limite a fórmula de recorrência

$$l = l - \ln(l) + 1$$

ou seja

$$\ln(l) = 1 \quad \text{ou} \quad l = e$$

Fim.