Análise Matemática 1 - Correcção Melhoria 2.º Teste

7 de Janeiro de 2019

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x = 0$ tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$. Qual das seguintes rectas é tangente ao gráfico da função

$$g(x) = \ln(f(x) + 1)$$

no ponto de abcissa $x = 0$?

(a) $y = -x + \ln(2)$ (b) $y = \dfrac{x}{2} + \ln(2)$ (c) $y = \ln(2) \cdot x$ <u>(d)</u> $y = x + \ln(2)$

2. Considere a função $h : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, injectiva, definida por $h(x) = e^{2x} - x$. Denotando por h^{-1} a inversa de h para a composição de funções, qual o valor de $\left(h^{-1}\right)'(e^2 - 1)$?

(a) $\dfrac{1}{e^2 - 1}$ <u>(b)</u> $\dfrac{1}{2e^2 - 1}$ (c) 1 (d) $e^2 - 1$

3. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \arctan(x - 1)$$

Podemos afirmar que:

(a) O gráfico de g não tem pontos de inflexão.

(b) $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de g.

(c) $(1, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico de g.

(d) $(0, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico de g.

4. Seja f uma função real de variável real contínua em $[0, +\infty[$, diferenciável em $]0, +\infty[$ com derivada positiva, tal que $f(0) = 0$. Fixado $a > 0$, uma aplicação do Teorema de Cauchy no intervalo $[0, a]$ permite-nos afirmar que:

(a) Existe $c \in]0, a[$ tal que $\dfrac{\ln(f(a)+1)}{f(a)} = \dfrac{1}{f(c)+1}$.

(b) Existe $c \in]0, 1[$ tal que $\dfrac{\ln(f(a)+1)}{f(a)} = \dfrac{1}{f(c)+1}$.

(c) Existe $c \in]0, a[$ tal que $\dfrac{f(a)}{e^{f(a)}-1} = e^{f(c)}$.

(d) Existe $c \in]0, a[$ tal que $\dfrac{f(a)}{a^2} = \dfrac{f'(c)}{c}$.

5. Seja $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $g'(0) = 0$ e $g''(0) > 0$. Considere a função $h(x) = g(x^2)$. Podemos afirmar que:

(a) h tem um mínimo relativo em $x = 0$.

(b) h tem um máximo relativo em $x = 0$.

(c) h tem um ponto de inflexão em $x = 0$.

(d) h é estritamente crescente numa vizinhança de $x = 0$.

Grupo 2 – (Mude de folha)

Considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-\sqrt{3}x}\sin(x)$.

(a) (3 v.) Estude a existência de extremos de f no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Resposta: Derivamos

$$f'(x) = -\sqrt{3} \cdot e^{-\sqrt{3}x}\sin(x) + e^{-\sqrt{3}x}\cos(x) = e^{-\sqrt{3}x}\cos(x)\left(-\sqrt{3}\tan(x) + 1\right)$$

Temos que $e^{-\sqrt{3}x}\cos(x) > 0$ em $]0, \pi/2[$. Donde

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad \tan(x) < \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{e} \qquad f'(x) < 0 \quad \text{se} \quad \tan(x) > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

donde f é estritamente crescente em $]0, \frac{\pi}{6}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$. Concluímos que, no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, f atinge um máximo em $x = \frac{\pi}{6}$.

(b) (2 v.) Utilizando o Teorema de Rolle, mostre que a equação

$$f(x) + xf'(x) = 0$$

tem infinitas soluções.

(sugestão: observe que $(x \cdot f(x))' = f(x) + xf'(x)$)

Resposta: A função $h(x) = x \cdot f(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e temos $h(k\pi) = 0$ para todo o $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando o teorema de Rolle num intervalo de tipo $[k\pi, (k+1)\pi]$, concluímos a existência de $c_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tal que

$$h'(c_k) = f(c_k) + c_k f'(c_k) = 0$$

Para valores de $k \in \mathbb{Z}$ diferentes, as soluções são necessariamente diferentes pois pertencem a intervalos disjuntos.

Grupo 3 – (Mude de folha)

(a) (2,5 v.) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 em $x = 1$ da função $f(x) = \sqrt{x+3}$, com resto de Lagrange, e conclua que

$$\sqrt{x+3} > \frac{7}{4} + \frac{x}{4} - \frac{(x-1)^2}{4^3} \qquad \text{se} \quad x > 1$$

Resposta: Temos, para um certo $c \in]1, x[$,

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)_{x=1}(x-1) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{4\sqrt{(x+3)^3}}\right)_{x=c}(x-1)^2$$

ou

$$\sqrt{x+3} = 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{(c+3)^3}} \cdot (x-1)^2$$

Posto que $c > 1$, temos

$$\frac{1}{4\sqrt{(c+3)^3}} < \frac{1}{4 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}$$

donde, dado que $(x-1)^2 > 0$,

$$\sqrt{x+3} > 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot 4^{\frac{3}{2}}} \cdot (x-1)^2 = \frac{7}{4} + \frac{x}{4} - \frac{(x-1)^2}{4^3}$$

(b) (2,5 v.) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\cosh(x))}{x}$ (recorde: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)

Resposta: Temos $\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, pelo que podemos aplicar a regra de Cauchy. A existência de limite L para a razão das derivadas garante que o limite estudado será L. Deste modo, derivando numerador e denominador, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\cosh(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

Grupo 4 – (Mude de folha)

Consideramos um tronco cónico C com volume $\frac{\pi}{3}$, ou seja, cuja altura h e raio r do círculo da base são tais que

$$r^2 h = 1$$

(a) (1 v.) Tendo em conta que a área de superfície lateral de um tronco cónico de altura h e raio r é dada por $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ justifique que a área da superfície lateral de C é dada, em função da altura h, por

$$S(h) = \pi\sqrt{\frac{1}{h^2} + h} \qquad h \in]0, +\infty[$$

Resposta: Temos $r = 1/\sqrt{h}$ pelo que substituindo na fórmula de S, obtemos

$$S(h) = \pi\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{\frac{1}{h} + h^2} = \pi\sqrt{\frac{1}{h^2} + h}$$

(b) (1,5 v.) Determine, justificando, o valor $h_0 \in]0, +\infty[$ para o qual a função

$$f(h) = \frac{1}{h^2} + h$$

atinge o seu mínimo.

Resposta: Temos

$$f'(h) = -\frac{2}{h^3} + 1$$

pelo que $f'(h) < 0$ se $0 < h < \sqrt[3]{2}$ e $f'(h) > 0$ se $h > \sqrt[3]{2}$. Concluímos que f atinge um mínimo absoluto estrito em $h_0 = \sqrt[3]{2}$.

(c) (1,5 v.) Utilizando a alínea anterior, determine as dimensões r_0 e h_0 de um tronco cónico C, com volume $V = \frac{\pi}{3}$, de modo a que a área da sua superfície lateral seja mínima.

(sugestão: comece por justificar que as funções S e f definidas nas alíneas anteriores atingem os respectivos mínimos no mesmo ponto h_0).

Resposta: Temos $S(h) = \pi\sqrt{f(h)}$, ou seja, S resulta da composição de uma função estritamente crescente com f. Donde,

$$h \neq h_0 \Rightarrow \quad f(h) > f(h_0) \quad \Rightarrow \quad S(h) > S(h_0)$$

Deste modo, as dimensões que minimizam a superfície lateral de C são

$$h_0 = \sqrt[3]{2} \qquad \text{e} \qquad r_0 = \frac{1}{\sqrt{h_0}} = \frac{1}{2^{1/6}}$$

Fim.