Análise Matemática 1 - Correcção M. 3.º Teste

7 de Janeiro de 2019

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Considere a função $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$. Considere a partição $P = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ do intervalo $[0,1]$.

Qual o valor de $\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P)$?

(a) 0 <u>(b)</u> $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

2. Qual dos seguintes integrais permite calcular a área da região do plano delimitada inferioremente pelo gráfico $y = |x|$ e delimitada superiormente pelo círculo trigonométrico?

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} - |x|\, dx$ (b) $\displaystyle 2 \cdot \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} - x\, dx$

<u>(c)</u> $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} - |x|\, dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} - |x|\, dx$

3. Qual o valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\, dx$?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 2 <u>(c)</u> $\frac{8}{3}$ (d) 3

4. Considere a função $G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^4}\, dt$. Qual das seguintes afirmações é falsa?

(a) $0 < G(1) < 1$ (b) $G(a) + G(-a) = 0$ para todo o $a \in \mathbb{R}$.

(c) G é estritamente crescente (d) $G(3) - G(2) > \frac{1}{1+2^4}$

5. Seja F a primitiva da função $f(x) = e^x \cdot \sin(e^x)$ que se anula em $x = \ln(\pi)$. Qual o valor de $\lim_{x \to -\infty} F(x)$?

(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2

Grupo 2 – (Mude de folha)

(a) (2,5 v.) Determine a primitiva F de $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+2}$ que verifica $F(-1) = 2$.

Resposta: Temos

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+2} = \frac{x}{(x+1)^2+1} = \frac{x+1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

Donde

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\, dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+1) - \arctan(x+1) + c$$

A condição $F(-1) = 2$ determina $c = 2$.

(b) (2,5 v.) Calcule $\int 2x^3 e^{-x^2}\, dx$.

(sugestão: escreva $\int x^2 \cdot 2xe^{-x^2}\, dx$ e utilize uma primitivação por partes)

Resposta:

$$\int x^2 \cdot 2xe^{-x^2}\, dx = -x^2 e^{-x^2} + \int 2xe^{-x^2}\, dx = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + c$$

Grupo 3 – (Mude de folha)

(a) (2,5 v.) Calcule $\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\, dx$ (sugestão: utilize a mudança de variável $\sqrt{x+1} = t$).

Resposta: Supondo $\sqrt{x+1}=t$, temos $x=t^2-1$ e $\dfrac{dx}{dt}=2t$. Temos então, pelo teorema de mudança de variável no integral,

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx=\int_0^1 (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt=\int_0^1 2t^4-2t^2\,dt=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{5}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{15}$$

(b) (2,5 v.) Seja $f:[0,+\infty[\mapsto\mathbb{R}$ uma função contínua tal que que

$$\int_0^{x^2} f(\sqrt{t})dt=x^3$$

Derive ambos os membros desta igualdade em $x>0$ e determine a função f.

Resposta: Como $f(\sqrt{x})$ é contínua em $x>0$ podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Derivando ambos os membros da igualdade em $x>0$, temos

$$f(\sqrt{x^2})\cdot 2x=3x^2$$

logo

$$f(x)=\frac{3}{2}x \qquad \text{se} \quad x>0$$

Como f é contínua em $x=0$, concluímos que $f(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{3}{2}x$, ou seja $f(x)=\frac{3}{2}x$ no seu domínio.

Grupo 4 – (Mude de folha)

(a) (2 valores) Admita que o perfil de uma ponte suspensa sobre um canyon é representada pelo gráfico da função

$$f:[-\ln 2,\ln 2]\mapsto\mathbb{R}\,, \qquad f(x)=2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$$

em que $|x|$ é uma distância medida em hectómetros. Calcule

$$\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

e interprete geométricamente o resultado.

Recorde: $\cosh(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$; $\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$.

Resposta: Calculamos $f'(x)=\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$ pelo que

$$\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)}\sqrt{1+\left(\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\,dx=\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)}\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\,dx=$$

$$=\left[2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-\ln(2)}^{\ln(2)}=4\sinh\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$$

O valor obtido corresponde ao comprimento, em hectómetros, da ponte suspensa.

(b) (2 valores) Em 1643, o matemático Torricelli considerou o sólido que se obtem por rotação em torno do eixo das abcissas do gráfico da função $h : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Estude a convergência dos integrais impróprios

$$\int_1^{+\infty} \pi h^2(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} 2\pi h(x)\sqrt{1 + h'(x)^2}\, dx$$

e comente a afirmação: "Um sólido de $\mathbb{R}^3$ pode ter volume finito e área de superfície infinita"

Resposta:
Temos

$$\int_1^{+\infty} \pi h^2(x)\, dx = \int_1^{+\infty} \pi \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{M\to+infty} \pi \int_1^{M} \frac{1}{x^2}\, dx = \pi$$

Trata-se pois de um integral impróprio convergente e que determina o volume de sólido considerado.

Por outro lado

$$\int_1^{+\infty} 2\pi h(x)\sqrt{1 + h'(x)^2}\, dx = \int_1^{+\infty} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

Temos, para $x > 0$

$$\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > \frac{1}{x}$$

Em particular, como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ é divergente, concluímos que este integral impróprio, que determina a área de superfície lateral do nosso sólido, é divergente.

A afirmação é pois verdadeira, sendo corroborada pelo exemplo do sólido de Torricelli.

Fim.