Análise Matemática 1 - 1.º Teste

24 de Outubro de 2018

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1 - Versão A

Na folha de resposta assinale Versão A e indique, para cada item, qual a opção correcta.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Considere o conjunto $A = \left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right): \quad n \in \mathbb{N}\right\}$. Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(a) $A' = \{-1, 0, 1\}$.

(b) $A' = \emptyset$.

(c) $A' = Fr(A)$.

(d) $Fr(A) = \{-1, 1\}$.

2. Considere a sucessão $u_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$. Podemos afirmar que:

(a) $\lim u_n = 0$ **(b)** $\lim u_n = 1$ (c) $\lim u_n = 2$ (d) $\lim u_n = +\infty$

3. Considere a função de variável real de domínio $I = [1, +\infty[$ definida por

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Seja $B = f(I)$ o contradomínio de f. Podemos afirmar que:

(a) $0 \in Fr(B)$ (b) $\ln(2) \in int(B)$ (c) B é aberto (d) B é fechado

4. Indique qual das seguintes funções injectivas de variável real verifica

$$f = f^{-1}$$

em que f^{-1} é a inversa de f para a composição de funções.

(recorde que a igualdade de funções requer a igualdade dos respectivos domínios)

(a) $f_1(x) = x^2\,, \quad x \in [0, +\infty[$ (b) $f_2(x) = 1 - x\,, \quad x \in [-1, 1]$

(c) $f_3(x) = 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}$ **(d)** $f_4(x) = 1 - x\,, \quad x \in [0, 1]$

5. Considere a função de variável real

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Seja $C \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos em que h é contínua. Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(a) $C = \emptyset$ **(b)** $C = \{0\}$ (c) $C = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (d) $C = \mathbb{R}$

Grupo 2 – (Mude de folha)

(a) (2 v.) Determine o limite das seguintes sucessões:

$$a_n = \frac{n + \cos(n)}{n\ln(n+1)} \qquad b_n = \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n$$

Resposta:
No caso da primeira sucessão, temos

$$a_n = \frac{n + \cos(n)}{n\ln(n+1)} = \frac{1 + \cos(n)/n}{\ln(n+1)}$$

Posto que $|\cos(n)| \leq 1$, temos

$$\lim 1 + \cos(n)/n = 1$$

Além disso, temos $\lim \ln(n+1) = +\infty$ pelo que $\lim a_n = \frac{1}{+\infty} = 0$.

No caso da segunda sucessão, temos

$$b_n = \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n = \left(\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$$

Logo

$$\lim b_n = \lim \left(\frac{(1 - 1/n)^n}{(1 + 1/n)^n}\right)^2 = \left(\frac{e^{-1}}{e}\right)^2 = e^{-4}$$

(b) (1,5 v.) Considere a sucessão $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Verifique que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Conclua que

$$c_{n+1} \geq \frac{c_n}{e} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

em que e é o número de Neper.

Resposta: Escrevemos

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

o que justifica a igualdade.

Posto que a sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é monótona crescente e converge para o número de Neper temos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{1}{e}$$

pelo que

$$c_{n+1} \geq \frac{c_n}{e} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(c) (1,5 v.) Utilizando a conclusão da alínea anterior, prove por indução

$$\frac{n!}{n^n} \geq \frac{1}{e^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: Verifiquemos a base de indução. Tomando $n = 1$, tem-se

$$1 \leq \frac{1!}{1^1} \leq 1$$

pelo que a proposição é verdadeira neste caso.

Verifiquemos que a propriedade é indutiva, isto é, que a hipótese

$$c_n \geq \frac{1}{e^{n-1}}$$

implica

$$c_{n+1} \geq \frac{1}{e^n}$$

em que $c_n = n!/n^n$. Ora, pela alínea anterior, temos

$$c_{n+1} \geq \frac{c_n}{e} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

pelo que, utilizando a hipótese de indução, obtemos

$$c_{n+1} \geq \frac{1}{e^{n-1}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e^n}$$

A proposição é pois verdadeira para todo o n natural.

Grupo 3 – (Mude de folha)

Considere a função função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{3}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) (1,5 v.) Verifique que f é contínua em $x = 0$

Resposta: Tomemos uma sucessão x_n convergente para zero por valores diferentes de zero. Temos

$$f(x_n) = x_n \cdot \sin(1/x_n)$$

Ou seja f é o produto do infinitésimo x_n pela sucessão limitada $\sin(1/x_n)$ sendo por isso convergente para zero. Temos então

$$f(0) = \lim f(x_n)$$

pelo que f é contínua em $x = 0$. (Nota: existem resoluções alternativas como, por exemplo, referir $|f(x)| \leq |x|$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e deduzir o limite em zero por enquadramento)

(b) (2 v.) Justifique que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

Resposta: Fazendo a mudança de variável $x = \frac{1}{y}$, temos, pelo limite notável da função seno em 0,

$$\lim_{x\to-\infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right) = \lim_{y\to0^-} \frac{\sin(3y)}{y} = 3 \cdot \lim_{y\to0^-} \frac{\sin(3y)}{3y} = 3$$

(Nota: Não é obrigatório explicitar a mudança de variável no cálculo do limite.)

(c) (1,5 v.) Mostre que, para todo o $k \in]0, 3[$, a equação $f(x) = k$ tem pelo menos duas soluções distintas.

Pela alínea anterior, temos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$ pelo que, dado $k \in]0, 3[$, existe um valor $a < 0$ tal que $f(a) > k$. Aplicando o teorema de Bolzano em $[a, 0]$, concluímos que existe $c \in]a, 0[$ tal que $f(c) = k$. Tendo em conta que $f(x) = f(-x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, concluímos que $f(-c) = k$ pelo que existem pelo menos duas soluções distintas para a equação, uma negativa e outra positiva. Alternativamente, podemos estudar o limite em $+\infty$ usando os mesmos argumentos que na alínea (b).

Grupo 4 – (Mude de folha)

Pretende-se construir uma sucessão convergente para $\bar{x}$, <u>única</u> solução real não negativa da equação

$$e^x - 3 = x$$

(a) (0,5 v.) Verifique que a equação considerada é equivalente à equação $x = \ln(x+3)$ em que $x \in]-3+\infty[$.

Resposta: Temos, para $x \in]3, +\infty[$,

$$e^x - 3 = x \quad \Leftrightarrow e^x = x + 3 \quad \Leftrightarrow x = \ln(x+3)$$

(b) (1,5 v.) Mostre que os termos da sucessão definida por recorrência por

$$u_1 = 0\,, \quad u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$$

são não-negativos.

Resposta: Mostremos o resultado por indução. A propriedade é verdadeira para $u_1 = 0$. Admitindo que $u_n \geq 0$, verifiquemos que u_{n+1} também é não negativo. Temos, pela monotonia da função logaritmo,

$$u_{n+1} = \ln(u_n + 3) \geq \ln(3) \geq 1 > 0$$

pelo que a afirmação é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(c) (2 v.) Utilizando a alínea anterior e a desigualdade,

$$|\ln(b+3) - \ln(a+3)| \leq \frac{1}{3}|a-b| \qquad a, b \geq 0$$

justifique que a sucessão u_n é convergente para $\bar{x}$.

Resposta: Temos, pela alínea anterior, que $u_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Podemos então escrever

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |\ln(u_{n+1} + 3) - \ln(u_n + 3)| \leq \frac{1}{3}|u_{n+1} - u_n|$$

Por um resultado visto na aula teórica, a sucessão (u_n) é de Cauchy, sendo por isso convergente para um certo $l \in \mathbb{R}$. Como os termos de (u_n) são não negativos, tem-se $l \geq 0$. Além disso, a subsucessão (u_{n+1}) também converge para l. Passando ao limite ambos os membros da igualdade

$$u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$$

concluímos

$$l = \ln(l + 3)$$

Pela alínea (a), l é a solução não negativa da equação $e^x - 3 = x$.

Fim.